

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

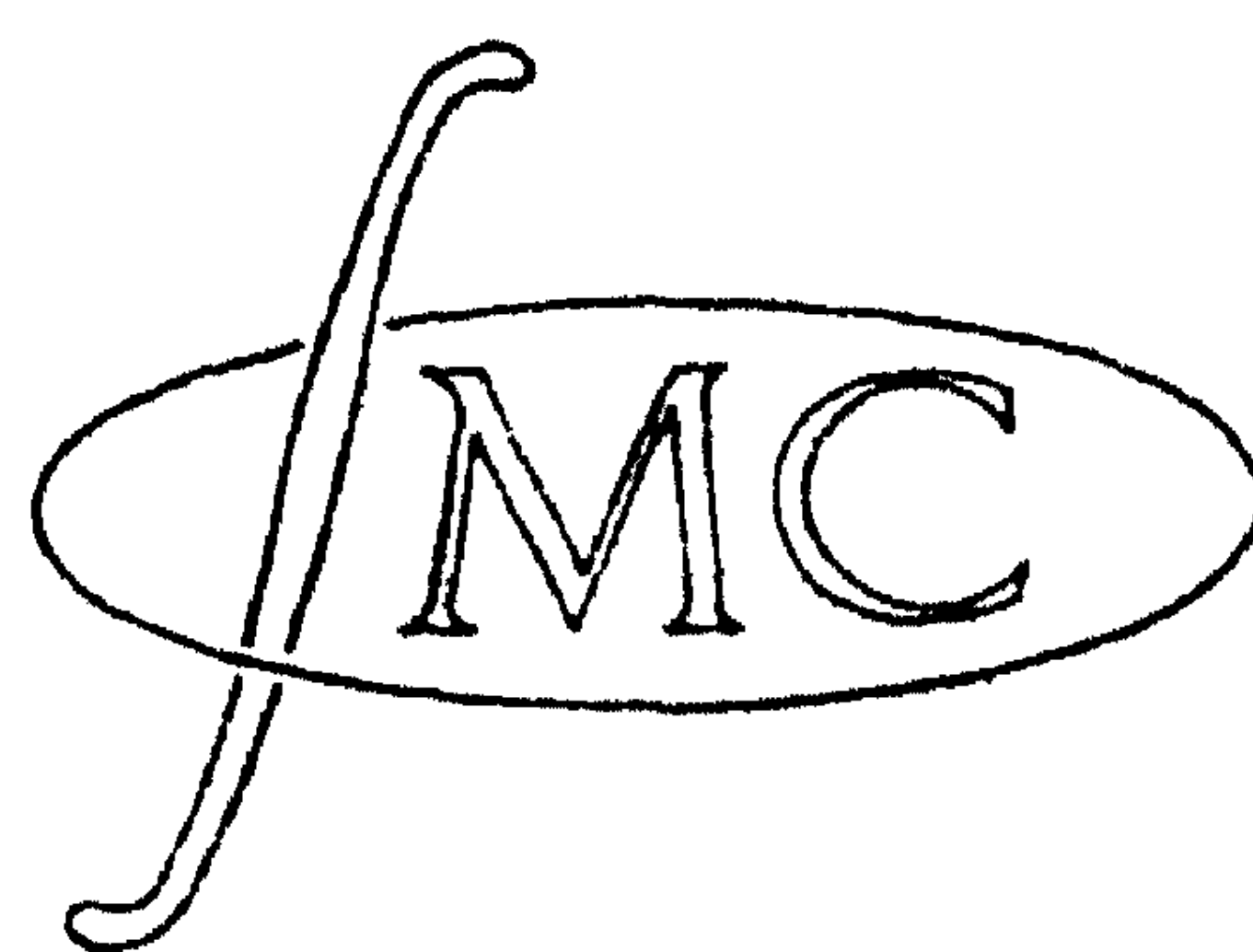
AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 295

Syllabus van het Colloquium waarschijnlijkheidsrekening

. o.l.v. Prof.Dr. J.Th. Runnenburg

Hoofdstuk 3: Maattheoretische opbouw van de
waarschijnlijkheidsrekening (p.164-204)



Printed at the Mathematical Centre at Amsterdam, 49, 2nd Boerhaavestraat.
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11th of February 1946, is a non - profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Scientific Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Errata bij S 295 (syllabus colloquium whr) hoofdstuk 3.

blz.	regel	staat:	moet staan:
166	8 v.o.	K	$\mathcal{K}$
167	17 v.b.	(ω_0) voor	$(\omega_0)\}$ voor
168	15 v.o.	deelbaar	meetbaar
	6 v.o.	sommerbaar	sommeerbaar
169	11 v.b.	en	een
	12 v.o.	kritirium	kriterium
171	4 v.b.	dy_1	dy_{m+1}
175	1 v.o.	$\int_R y \, dP' -$	$\int_R y \, dP' =$
176	12 v.b.	$\in B$	$\in B\}$
	14 v.b.	$\leq c_2)$	$\leq c_2\})$
	5 v.o.	is	$< \infty$ is
177	9 v.o.	$f(\sum p_i x_i)$	$f(\sum p_i x_i) \leq$
178	1 v.o.	$k_1 \dots k_n$	$\wedge_{k_1 \dots k_n}$
179	3 en 11 v.o.	Chebyshen	Chebyshev
179	9 v.o.	Bernouilli	Bernoulli
180	4 v.b.	Chebyshen	Chebyshev
	6 v.o.	0	≥ 0
	2 v.o.	Chebysher	Chebyshev

blz.	regel	staat:	moet staan:
182'	5 v.o.	systeem van	systeem
183'	4 v.o.	$\xi_{\omega}(\underline{x} \underline{y})$ $\omega \in \{\underline{y} = y\}$	$\xi(\underline{x} \underline{y})$ $\underline{y} = y$
185'	10 v.b.	$B_{\delta} = \{\omega\}$	$B_{\delta} = \{\omega\}$
187'	15 v.o.	wordrn	worden
	7 v.o.	$\xi_{\omega}(\underline{x} \underline{y})$ $g(y(\omega))$	$\xi(\underline{x} \underline{y})$ $g(\underline{y})$
188'	9 v.b.	$\varphi(\underline{y} \in A')$	$\varphi(\underline{y} \in A')$
	9 v.o.	$\xi(\underline{z} \underline{y})$	$\xi(\underline{z} \underline{y})$
192'	1 v.b.	Eatou	Fatou
194'	14 v.o.	$\underline{x} \in I$ - b.o.	$\underline{x} \in I$ P - b.o.
	11 v.o.	sommeerbaar	integreerbaar
	9 v.o.	$g(\xi(\underline{\cdot} \mathcal{B}))$	$g(\xi(\underline{x} \mathcal{B}))$
195'	13 v.b.	$\underline{x}_n \{$	$\underline{x}_n = \{$
	6 v.o.	a_n als	$g(a_n)$ als
	5 v.o.	x als	$g(x)$ als
	4 v.o.	b_n als	$g(b_n)$ als
196'	5 v.o.	of	op
197'	4 v.b.	P	P_{ω}
198'	16 v.b.	B_n	B_{2n}

3 Waarschijnlijkheidsrekening.

3.1. Stochastische variabelen

Def. 3.1.1: een maatruimte $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ met de eigenschap $P(\Omega) = 1$ heet waarschijnlijkheidsveld. De genormeerde maat P (Probabilitas) wordt waarschijnlijkheid (kans) genoemd, de elementen van $\mathcal{K}$ heten eventualiteiten (gebeurtenissen).

Def. 3.1.2: de $\mathcal{K}$ -meetbare reële functies op het waarschijnlijkheidsveld $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ heten stochastische variabelen (stochastische grootheden).

We zullen de stochastische variabelen $x(\omega)$, $y(\omega)$ etc. dikwijls noteren als $\underline{x}$, $\underline{y}$ etc. We schrijven dan, als B een Borelvz. op de reële as is $P\{\underline{x} \in B\}$ in plaats van $P(\{\omega \mid x(\omega) \in B\})$ e.d.

Een greep van n stochastische variabelen $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ zullen we soms aangeven met $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$. We spreken dan van een stochastische vector. Algemener duiden we ook een vz. stochastische variabelen $\{\underline{x}_\tau \mid \tau \in T\}$, waarbij T een willekeurige indexvz. is met $\underline{x}$ aan. Ook voor niet stochastische vectoren gebruiken we deze afkortingen. We schrijven bijv. $x(\omega) = a$ in plaats van $x_\tau(\omega) = a_\tau$ voor alle $\tau \in T$.

Def. 3.1.3: is $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ (n eindig) een stochastische vector, dan heet de functie

$$F_{\underline{x}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\underline{x}_1 \leq x_1, \dots, \underline{x}_n \leq x_n\}$$

de verdelingsfunctie van $\underline{x}$ of de simultane verdelingsfuncties van $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$.

We zagen al op blz. 95 en 96 dat $F_{\underline{x}}$ een verdelingsfunctie is in de zin van Def. 1.5.4.

Def. 3.1.4: Twee stochastische variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ heten equivalent, als $x(\omega) = y(\omega)$ P -b.o. Twee stochastische vectoren heten equivalent als hun componenten twee aan twee equivalent zijn.

Opm.: Het is duidelijk, dat twee equivalente stochastische vectoren dezelfde verdelingsfunctie hebben. Het omgekeerde is geenszins het geval.

We geven nu een zodanige formulering van de stelling van Kolmogorov, dat het belang er van voor de waarschijnlijkheidsrekening duidelijk uitkomt:

St. 3.1.1: is voor iedere eindige greep $\tau_1, \dots, \tau_r$ uit een indexvz T een verdelingsfunctie $F_{\tau_1, \dots, \tau_r}$ gegeven en zijn al deze verdelingsfuncties consistent, d.w.z. is steeds

$$F_{\tau_1, \dots, \tau_r, \tau_{r+1}}(x_1, \dots, x_r, \infty) = F_{\tau_1, \dots, \tau_r}(x_1, \dots, x_r)$$

dan is er een wh-veld, waarop men stochastische variabelen $\underline{x}_\tau$ kan definiëren zodanig, dat voor iedere eindige greep $\tau_1, \dots, \tau_r$ de vector $(\underline{x}_{\tau_1}, \dots, \underline{x}_{\tau_r})$ de verdelingsfunctie $F_{\tau_1, \dots, \tau_r}$ heeft.

Bewijs: Zij $\mathcal{B} = \left(\prod_{\tau \in T} \mathcal{C}_\tau \right)$ de vz der Borelvzn in R^T ($\mathcal{C}_\tau$ is de vz der Borelvzn in het τ^e exemplaar van R^1) en zij $\mu_{\tau_1, \dots, \tau_r}$ de door $\mu_{\tau_1, \dots, \tau_r}((a, b]) = \Delta_a^b F_{\tau_1, \dots, \tau_r}$ op $\mathcal{C}_{\tau_1} \times \dots \times \mathcal{C}_{\tau_r}$ bepaalde intervalmaat. Nu wordt volgens St. 2.5.3 op $(R^T, \mathcal{B})$ een maat P bepaald met de eigenschap $P(Z(\wedge_{\tau_1, \dots, \tau_r})) = \mu_{\tau_1, \dots, \tau_r}(\wedge_{\tau_1, \dots, \tau_r})$, waarbij $\wedge_{\tau} \in \mathcal{C}_\tau$. De functies $x_\tau(\omega) = \omega_\tau$ (de τ^e coördinaat van R^T) zijn nu stochastische variabelen met de gegeven verdelingsfuncties, immers:

$$P\{\underline{x}_{\tau_1} \leq x_{\tau_1}, \dots, \underline{x}_{\tau_r} \leq x_{\tau_r}\} = \mu_{\tau_1, \dots, \tau_r}((-\infty, x_{\tau_1}] \dots (-\infty, x_{\tau_r}]) = F_{\tau_1, \dots, \tau_r}(x_1, \dots, x_r).$$

We kunnen dus steeds elk willekeurig aantal stochastische variabelen, voor zover deze door hun verdelingsfuncties bepaald zijn, op één wh-veld definiëren. We wijzen er echter nogmaals op dat een vz. stochastische variabelen $\{x_\tau \mid \tau \in T\}$ gedefiniëerd op $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ i.h.a. niet volledig door de bijbehorende verdelingsfuncties beschreven kan worden. We herinneren in dit verband aan het begrip verplanten (zie pag. 93 e.v.). Hierbij wordt Ω in R^T afgebeeld door $R^T \ni y = x(\omega)$, terwijl de σ -algebra $\mathcal{B}$ der Borelvzn in R^T door de σ -homomorfie φ op $\mathcal{K}_x$ wordt afgebeeld: als $C \in \mathcal{B}$, dan is $\varphi(C) = \{\omega \mid x(\omega) \in C\} \in \mathcal{K}_x$ = de kleinste σ -algebra, die alle vzn van de vorm $\{\omega \mid x_\tau(\omega) \leq y_\tau\}$ bevat. Op $\mathcal{B}$ wordt dan een wh P' ingevoerd door $P'(C) = P(\varphi(C))$. Men kan gemakkelijk inzien, dat P' juist de in St. 3.1.1 genoemde door de verdelingsfuncties voortgebrachte maat is. Het gebruik van verdelingsfuncties komt dus neer op de overgang van de maatruimte

$(\Omega, \mathcal{K}, P)$ naar $(R^T, {}^B\mathcal{G}, P')$. Dit wil zeggen, dat deelvzn van Ω , die wel tot $\mathcal{K}$ maar niet $\mathcal{K}_x$ behoren nu niet meer als eventualiteiten kunnen worden opgevat. Zo is de vz $\{\omega | x_\tau(\omega) \leq c \ (\tau \in T)\}$ i.h.a. geen eventualiteit, omdat de vz $\{y | y_\tau \leq c \ (\tau \in T)\}$ geen element van ${}^B\mathcal{G}$ is, die immers slechts aftelbaar-dimensionale cylindervzn bevat (St.2.5.1). Voor de meeste praktische toepassingen is deze beperking echter geen bezwaar.

We voeren nu het volgende begrip in:

Def. 3.1.5: een wh-veld $(\Omega, \mathcal{K}^*, P^*)$ heet een vergroving van $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, als $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{K}$ en $P^*(A^*) = P(A^*)$ voor alle $A^* \in \mathcal{K}^*$.

Een voorbeeld van een vergroving van $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ is het wh-veld $(\Omega, \mathcal{K}_x, P)$. Het kan nu voorkomen, dat $\mathcal{K}^*$ zo "grof" geworden is, dat Ω te "fijn" is om $\mathcal{K}^*$ eenvoudig te beschrijven. We kunnen dan proberen een ruimte Ω^* te contrueren, die beter bij $\mathcal{K}^*$ is aangepast. We vragen ons nu algemeen af, of het mogelijk is, om bij een gegeven wh-veld $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ een ruimte Ω^* te construeren, die bestaat uit disjuncte deelvzn ω^* van Ω , zodanig dat iedere $K \in \mathcal{K}$ een, niet noodzakelijk aftelbare, vereniging van ω^* -en is en waarbij de nieuwe "punten" ω^* zo groot mogelijk zijn. We zullen zien, dat de volgende definitie van ω^* aan de gestelde eisen voldoet: definiëer bij iedere $\omega \in \Omega$ de vz ω^* als

$$\omega^* = \bigcap \{K \in \mathcal{K} \mid \omega \in K\}.$$

De vzn ω^* zijn in het algemeen over-aftelbare doorsneden van K 's, dus geen elementen van $\mathcal{K}$. We bewijzen nu

- a) als $\omega_1 \neq \omega_2$, dan is $\omega_1^* \omega_2^* = 0$ of $\omega_1^* = \omega_2^*$.
- b) voor alle $K \in \mathcal{K}$ geldt $K = \bigcup_{\omega \in K} \omega^*$.

bewijs a): als er een K is met $\omega_1 \in K$ en $\omega_2 \notin K$, dus $\omega_2 \in \bar{K}$ dan volgt uit de definitie, dat $\omega_1^* \omega_2^* = 0$ is. Geldt voor iedere $K \in \mathcal{K}$, dat ω_1 en ω_2 beiden of geen van beiden $\in K$ zijn, dan is $\omega_1^* = \omega_2^*$.

bewijs b): voor $\omega \in K$ geldt $\{\omega\} \subset \omega^* \subset K$, dus $K = \bigcup_{\omega \in K} \{\omega\} \subset \bigcup_{\omega \in K} \omega^* \subset K$, zodat $K = \bigcup_{\omega \in K} \omega^*$.

Noemen we de vz der verschillende ω^* nu Ω^* , dan is aan de gestelde eisen voldaan. Het is duidelijk, dat de ω^* niet vergroot kunnen worden, immers als we ω^* met een punt $\{\omega_0\}$ vergroten, dan zijn $\omega^* \cup \{\omega_0\}$ en ω_0^* niet disjunct. We kunnen ook niet ω^* met ω_0^* verenigen, omdat er een K is met $\omega_0 \in K$ en $\omega \notin K$, als $\omega^* \neq \omega_0^*$ is.

In plaats van "iedere K uit $\mathcal{K}$ is een vereniging van ω^* -en" zouden we moeten zeggen "er bestaat een eenduidige afbeelding $K \leftrightarrow K^*$ van de elementen van $\mathcal{K}$ op zich zelf". Hierbij zijn de K 's deelvzn van Ω en de K^* -en deelvzn van Ω^* . De afbeelding $K \leftrightarrow K^*$ is op triviale wijze een σ -isomorfie.

We beschouwen nu het speciale wh-veld $(\Omega, \mathcal{K}_x, P)$. $\mathcal{K}_x$ is de kleinste σ -algebra, die alle vzn van de vorm $\{\omega \mid x_\tau(\omega) \leq y_\tau\}$ bevat. Als nu $\omega_0 \in K \in \mathcal{K}_x$ en $x(\omega) = x(\omega_0)$ dan is ook $\omega \in K$, immers bij de constructie van $\mathcal{K}_x$ spelen alleen de functiewaarden $x_\tau(\omega)$ een rol en niet de individuele punten ω . Hieruit volgt, dat $\omega_0^* = \bigcap_{\omega_0 \in K} K \supset \bigcap_{\tau} \{\omega \mid x_\tau(\omega) = x_\tau(\omega_0)\} = \{\omega \mid x(\omega) = x(\omega_0)\}$. Anderzijds is $\omega_0 \in \{\omega \mid x_\tau(\omega) = x_\tau(\omega_0) \text{ voor iedere } \tau \in T\}$, dus $\omega_0^* \subset \bigcap_{\tau} \{\omega \mid x_\tau(\omega) = x_\tau(\omega_0)\}$, zodat $\omega_0^* = \{\omega \mid x(\omega) = x(\omega_0)\}$.

De ruimte Ω^* bestaat dus uit alle vzn van de vorm $\{\omega \mid x(\omega) = c\}$ met $c \in R^T$. Wanneer c geen element van de vz

$$R_x^T \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid y \in R^T, \exists \omega \ x(\omega) = y\} \text{ is}$$

dan is $\{\omega \mid x(\omega) = c\} = \emptyset$. Het is duidelijk, dat 'n één-eenduidige afbeelding $\Omega^* \leftrightarrow R_x^T$ bestaat. Men ziet verder gemakkelijk in, dat de algebra's $\mathcal{B}_f \cap R_x^T$ en $\mathcal{K}_x$ σ -isomorf zijn. De maatruimten $(\Omega^*, \mathcal{K}_x, P)$ en $(R_x^T, \mathcal{B}_f \cap R_x^T, P')$ zijn dus op σ -isomorfie na gelijk.

We beschouwen nu een stochastische variabele $f(\omega)$ op $(\Omega, \mathcal{K}_x, P)$.

Volgens de verplantingsstelling kan $f(\omega)$ verplant worden naar $(R^T, \mathcal{B}_f, P')$, zodanig dat voor de corresponderende functie $\Phi(y)$ geldt:

$\Phi(y)$ is $\mathcal{B}_f$ -meetbaar, dus $\Phi(y)$ is een Bairefunctie op R^T en $\varphi\{y \mid \Phi(y) \in B\} = \{\omega \mid f(\omega) \in B\}$ voor iedere Borelvz B op de reële as, terwijl de functie $x(\omega)$ overgaat in de functie y . We hebben dus

speciaal $\varphi(y \mid \Phi(y) = a) = \{\omega \mid x(\omega) \in \{y \mid \Phi(y) = a\}\} = \{\omega \mid \Phi(x(\omega)) = a\} = \{\omega \mid f(\omega) = a\}$, zodat $f(\omega) = \Phi(x(\omega))$. Hierbij is $\Phi(y)$ door $f(\omega)$ eenduidig bepaald op R_x^T en kan blijkens het bovenstaande tot R^T worden voortgezet als een Baire-functie. We vinden dus

St. 3.1.2: is $f(\omega)$ een stochastische variabele op $(\Omega, \mathcal{K}_x, P)$, dan is $f(\omega)$ te schrijven als een Bairefunctie van $x(\omega)$.

Opm. 1: we zagen eerder al (St. 2.1.3) dat iedere Baire-functie van een meetbare functie een meetbare functie is. De klasse der stochastische variabelen op $(\Omega, \mathcal{K}_x, P)$ is dus juist de klasse der Baire-functies van $\underline{x}$.

Opm. 2: zonder gebruik te maken van de verplantingsstelling kan men met behulp van de σ -isomorfe afbeelding $\mathcal{G} \cap R_x^T \xrightarrow{\varphi} \mathcal{K}_x$ aantonen, dat $f(\omega)$ een $\mathcal{G} \cap R_x^T$ -meetbare functie van $x(\omega)$ is. Immers: $f(\omega)$ is constant op vzn van de vorm $\{\omega | x(\omega) = c\}$, omdat $\omega \in \{\omega | f(\omega) = f(\omega_0)\}$ voor iedere ω met $x(\omega) = x(\omega_0)$. Dat wil zeggen, dat $f(\omega)$ een functie $g(x(\omega))$ is. We zien nu, dat $\varphi\{y | g(y) \leq a\} = \{\omega | f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{K}_x$, dus $\{y | g(y) \leq a\} \in \mathcal{G} \cap R_x^T$. Als $R_x^T \in \mathcal{G}$ is (bijv. als $R_x^T = R^T$), dan volgt hieruit direct, dat g een Baire-functie is. De vz R_x^T is echter i.h.a. geen element van $\mathcal{G}$. Tegenvoorbeeld: zij Ω een niet $\mathcal{G}$ -meetbaar deel van R^T , zij $\mathcal{K} = \mathcal{G} \cap \Omega$ en zij $x(\omega) = \omega$. Men ziet direct in, dat de functie $x(\omega) = \omega$ meetbaar is. $R_x^T = \{y | \exists \omega x(\omega) = y\} = \Omega$ is echter niet $\mathcal{G}$ -deelbaar per definitie.

3.2 Waarschijnlijkheidsdichtheden.

Def. 3.2.1: een L-sommeerbare functie $f(x_1, \dots, x_n)$ heet een verdelingsdichtheid of wh-dichtheid, als de functie $\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$ een verdelingsfunctie is. We zeggen dan, dat deze verdelingsfunctie een wh-dichtheid heeft.

Voor wh-dichtheden geldt

St. 3.2.1: een L-sommeerbare functie $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ is dan en slechts dan een verdelingsdichtheid, als

- $f(x) \geq 0$ is μ_L -b.o.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$.

Bewijs: 1° als f aan a) en b) voldoet, dan is $P(A) = \int_A f(x) dx$ een genormeerde intervalmaat op de L-meetbare vzn met verdelingsfunctie

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (\text{zie Def. 1.5.4}).$$

2° als $f(x)$ een wh-dichtheid is dan is $\int_a^b f(x)dx = \Delta_a^b F \geq 0$ voor alle reële a en b . Is Γ een eindige som van disjuncte intervallen, dan is dus ook $\int \Gamma f(x)dx \geq 0$. Is A een L-meetbare vz, dan is er een rij $\{\Gamma_n\}$ van eindige intervalsommen met $\mu_L(A \Delta \Gamma_n) < \frac{1}{n}$. (zie Def. 1.4.3 e.v.). Nu is $\left| \int_A f dx - \int_{\Gamma_n} f dx \right| \leq \int_{A \Delta \Gamma_n} |f| dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$, dus $\int_A f dx \geq 0$ en dus $f(x) \geq 0$ μ_L -b.o. Dat b) geldt is triviaal.

We zagen eerder, dat bij iedere verdelingsfunctie $F = F(x_1, \dots, x_n)$ de Borelvzn van R^n F -meetbaar zijn. Als F een dichtheid heeft geldt zelfs

St. 3,2.2: Als de verdelingsfunctie F en dichtheid f bezit, dan is iedere L-meetbare vz A ook F -meetbaar met $\int_A dF = \int_A f(x)dx$.

Bewijs: $\int f(x)dx$ is een maat op R^n , die op alle intervallen met $\int dF$ overeenstemt, zodat op grond van de uitbreidingsstelling voor maten $\int_B f(x)dx = \int_B dF$ is voor alle $B \in \mathcal{B}_G$. Voor een L-meetbare vz A geldt echter $A = B + A_0$ met $B \in \mathcal{B}_G$ en $A_0 \subset B_0 \in \mathcal{B}_G$ met $\mu_L(B_0) = 0$, dus $\int_{B_0} f dx = \int_{B_0} dF = 0$. Wegens de volledigheid van de F -maat en de L-maat is nu $\int_{A_0} f dx = \int_{A_0} dF = 0$, dus $\int_A f dx = \int_A dF$.

De volgende stelling geeft een kritirium voor het bestaan van een dichtheid bij de verdelingsfunctie F :

St. 3.2.3: de verdelingsfunctie F bezit dan en slechts dan een dichtheid, als iedere Borelvz met L-maat nul ook F -maat nul heeft.

Bewijs: de noodzakelijkheid van de voorwaarde volgt uit St. 3.2.2. Dat de voorwaarde voldoende is blijkt als volgt: zij A een vz met L-maat nul, dan is $A \subset B$ met $B \in \mathcal{B}_G$ en $\mu_L(B) = 0$, dus $\int_B dF = 0$ op grond van de volledigheid van de F -maat is ook $\int_A dF = 0$. De F -maat is dus absoluut continu t.o.v. de L-maat. Op grond van de stelling van Radon-Nikodym is er nu een L-sommeerbare functie f met $\int_A dF = \int_A f dx$, dus speciaal $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$.

Opm.: Uit St. 3.2.3 volgt, dat twee dichtheden f_1 en f_2 bij $F \in \mathcal{M}_L$ - b.o. gelijk zijn. Het is gebruikelijk, dichtheden overal ≥ 0 te kiezen en z. mogelijk continu. Het is duidelijk, dat, als een dichtheid f bij F gevonden kan worden, die op een interval I continu is, f de enig mogelijke dichtheid bij F is, die continu is op I : twee verschillende continue functies zijn verschillend op een v.z. van positieve L -maat.

Speciaal zullen we als $F'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x)$ bestaat en continu is steeds F' als dichtheid bij F kiezen. Om aan te tonen dat dit mogelijk is, bewijzen we

$$a) \quad \int_{-\infty}^x F'(y) dy = F(x) .$$

$$b) \quad F'(x) \geq 0 .$$

Bewijs a): door herhaalde toepassing van de zgn. hoofdstelling der integraal- en differentiaalrekening:

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(y) dy \quad \text{voor één-dimensionale R-integralen}$$

$$(F' \text{ is immers continu}) \text{ vindt men } \Delta_a^x F = \int_a^x F'(y) dy \quad \text{voor}$$

$$\text{alle } a \text{ en } x \text{ in } \mathbb{R}^n, \text{ dus } \int_{-\infty}^x F'(y) dy = F(x).$$

$$\text{Bewijs b): } F'(x) = \lim_{h \downarrow 0} h_1^{-1} \dots h_n^{-1} \Delta_x^{x+h} F \geq 0.$$

Anderzijds volgt uit

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \text{ dat}$$

$F' = f$ is voor alle x , waarvoor f continu is.

St. 3.2.4: is $f(x_1, \dots, x_n)$ een simultane verdelingsdichtheid bij $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ en is $m < n$, dan is op een vz van de L-maat nul in R^m na de functie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

een dichtheid bij $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)$.

Bewijs: voor de verdelingsfuncties F_m en F_n van $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)$ resp. $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ geldt:

$$\begin{aligned} F_m(x_1, \dots, x_m) &= F_n(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Het bewijs volgt verder direct uit de stelling van Fubini.

3.3 Onafhankelijkheid

Def. 3.3.1: de stochastische variabelen $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ heten onderling onafhankelijk (o.o.),

$$\text{als } F_{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n} = \prod_{j=1}^n F_{\underline{x}_j}.$$

Def. 3.3.2: de stochastische variabelen $\underline{x}_t$ ($t \in T$) heten o.o., als voor iedere eindige greep $t_1, \dots, t_n$ uit T de variabelen $\underline{x}_{t_1}, \dots, \underline{x}_{t_n}$ o.o. zijn.

Def. 3.3.3: de (eindig dimensionale) vectoren $\underline{x}_t = (\underline{x}_{t,1}, \dots, \underline{x}_{t,n(t)})$ ($t \in T$) heten o.o., als voor iedere eindige greep $t_1, \dots, t_n$ uit T

$$\text{geldt } F_{\underline{x}_{t_1}, \dots, \underline{x}_{t_n}} = \prod_{j=1}^n F_{\underline{x}_{t_j}}.$$

Def. 3.3.4: de stochastische vectoren $\underline{x}_u$ ($u \in U$) met

$$\underline{x}_u = \left\{ \underline{x}_{u,t_u} \mid t_u \in T_u \right\} \text{ heten o.o., als voor}$$

iedere eindige greep $u_1, \dots, u_n$ uit U ieder

stel eindige deelvectoren $\underline{y}_{u_1}, \dots, \underline{y}_{u_n}$ van $\underline{x}_{u_1}, \dots, \underline{x}_{u_n}$ o.o. zijn.

(Onder een eindige deelvector van $\underline{x}$ verstaan we een eindige vz van componenten van $\underline{x}$).

Def. 3.3.5: is $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ een wh-veld, dan heten de eventualiteiten $K_1, \dots, K_n$ o.o., als

$$P(K_1, \dots, K_n) = \prod_{j=1}^n P(K_j).$$

Def. 3.3.6: de deelalgebra's $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ van $\mathcal{K}$ heten o.o., als voor iedere keuze $K_1 \in \mathcal{K}_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}_n$ de eventualiteiten $K_1, \dots, K_n$ o.o. zijn.

We kunnen nu de onafhankelijkheid van stochastische vectoren $\underline{x}_u$ ($u \in U$) beschrijven met behulp van de algebra's $\mathcal{K}_{\underline{x}_u}$.

We bewijzen hierover

St. 3.3.1: de stochastische vectoren

$\underline{x} = \{ \underline{x}_t \mid t \in T \}$ en $\underline{y} = \{ \underline{y}_s \mid s \in S \}$ zijn dan en slechts dan o.o. als $\mathcal{K}_{\underline{x}}$ en $\mathcal{K}_{\underline{y}}$ o.o. zijn.

Bewijs: $\mathcal{K}_{\underline{x}}$ bevat alle eventualiteiten van de vorm

$\bigcap_{j=1}^n \{ \underline{x}_{t_j} \leq x_j \}$ en $\mathcal{K}_{\underline{y}}$ alle eventualiteiten $\bigcap_{k=1}^m \{ \underline{y}_{s_k} \leq y_k \}$.

Uit de onafhankelijkheid van $\mathcal{K}_{\underline{x}}$ en $\mathcal{K}_{\underline{y}}$ volgt dus direct de onafhankelijkheid van $\underline{x}$ en $\underline{y}$. Zijn omgekeerd $\underline{x}$ en $\underline{y}$ o.o. en geven wij de vz van eventualiteiten van de vorm

$\bigcap_1^n \{ x_j < \underline{x}_{t_j} \leq x'_j \}$ aan met $\hat{\mathcal{K}}_{\underline{x}}$ en de analoge vz bij $\underline{y}$

met $\hat{\mathcal{K}}_{\underline{y}}$, dan zijn $\hat{\mathcal{K}}_{\underline{x}}$ en $\hat{\mathcal{K}}_{\underline{y}}$ o.o., immers als $\hat{k}_x \in \hat{\mathcal{K}}_{\underline{x}}$ en $\hat{k}_y \in \hat{\mathcal{K}}_{\underline{y}}$ dan geldt

$$P\{ \hat{K}_y \cdot \hat{K}_x \} = \Delta_{x, y}^{x', y'} F_{\underline{x}_n \underline{y}_m} = \Delta_{x, y}^{x', y'} F_{\underline{x}_n} F_{\underline{y}_m} =$$

$$= \bigtriangleup_x^{x'} F_{\underline{x}_n} \bigtriangleup_y^{y'} F_{\underline{y}_m} = P\{\hat{K}_y\} \cdot P\{\hat{K}_x\}, \text{ waarbij}$$

$x=(x_1, \dots, x_n)$, $\underline{x}_n=(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{t_n})$ etc.

Voor een vaste $\hat{K}_x \in \hat{\mathcal{K}}_x$ met $P\{\hat{K}_x\} \neq 0$ definiëren we nu op $\mathcal{K}_y$ de vz-functie $\hat{P}\{K_y\} \stackrel{\text{def}}{=} P\{\hat{K}_x K_y\} / P\{\hat{K}_x\}$. Men ziet gemakkelijk in, dat $\hat{P}$ een maat is op $\mathcal{K}_y$. Maar $\hat{P}$ op $\hat{\mathcal{K}}_y$

met P overeenstemt en dus ook op de algebra van eindige sommen van $\hat{K}_y$'s, stemt $\hat{P}$ op de Borel uitbreiding van deze algebra met P overeen (zie St. 1.4.4). Deze Borel uitbreiding is echter juist $\mathcal{K}_y$. Dus $P\{K_y\} = P\{\hat{K}_x K_y\} / P\{\hat{K}_x\}$ of $P\{\hat{K}_x K_y\} = P\{\hat{K}_x\} P\{K_y\}$ voor alle $\hat{K}_x \in \hat{\mathcal{K}}_x$ (als $P\{\hat{K}_x\}=0$ is dit triviaal) en alle $K_y \in \mathcal{K}_y$.

Door bovenstaande redenering toe te passen op de maat

(op $\mathcal{K}_x$) $\hat{P}\{K_x\} = P\{K_x K_y\} / P\{K_y\}$ voor een $K_y \in \mathcal{K}_y$

met $P\{K_y\} \neq 0$ vindt men voor alle $K_x \in \mathcal{K}_x$ en alle $K_y \in \mathcal{K}_y$

$P\{K_x K_y\} = P\{K_x\} P\{K_y\}$; $\mathcal{K}_x$ en $\mathcal{K}_y$ zijn dus o.o.

. Door herhaling van de boven toegepaste redenering vindt men algemener

St. 3.3.2: de stochastische vectoren $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ zijn dan en slechts dan o.o., als $\mathcal{K}_{\underline{x}_1}, \dots, \mathcal{K}_{\underline{x}_n}$ o.o. zijn.

We kunnen nu Def. 3.3.4 iets korter als volgt formuleren:

Def. 3.3.4 : de stochastische vectoren $\underline{x}_u$ ($u \in U$) met $\underline{x}_u = \{ \underline{x}_{t_u} \mid t_u \in T_u \}$ heten o.o. als voor iedere eindige greep $u_1, \dots, u_n$ uit U de algebra's $\mathcal{K}_{u_1}, \dots, \mathcal{K}_{u_n}$ o.o. zijn.

Een gevolg van deze definitie is nu

St. 3.3.3: zijn de vectoren $\underline{x}_u = \{ \underline{x}_{tu} \mid t_u \in T_u \}$ ($u \in U$) o.o. en is voor iedere u $\underline{y}_u$ een vector, waarvan de componenten Baire-functies zijn van $\underline{x}_u$ dan zijn de vectoren $\underline{y}_u$ o.o.

Bewijs: de componenten $\underline{y}_{t_u}$ van $\underline{y}_u$ zijn Baire-functie van $\underline{x}_u$ en dus $\mathcal{K}_{\underline{x}_u}$ -meetbaar, d.w.z. de vnz $\{ \underline{y}_{t_u} \leq y_{t_u} \}$ zijn eln van $\mathcal{K}_{\underline{x}_u}$, dus $\mathcal{K}_{\underline{y}_u} \subset \mathcal{K}_{\underline{x}_u}$. Wegens de onafhankelijkheid van de $\mathcal{K}_{\underline{x}_u}$ zijn nu ook de $\mathcal{K}_{\underline{y}_u}$ o.o.

St. 3.3.4: zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ eindig-dimensionale stochastische vectoren, die o.o. zijn en verdelingsdichtheden $f_{\underline{x}}$ en $f_{\underline{y}}$ bezitten, dan heeft de vector $(\underline{x}, \underline{y})$ de verdelingsdichtheid $f_{\underline{x}, \underline{y}} = f_{\underline{x}} f_{\underline{y}}$. Omgekeerd volgt uit $f_{\underline{x}, \underline{y}} = f_{\underline{x}} f_{\underline{y}}$ dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ o.o. zijn.

$$\begin{aligned} \text{Bewijs: } F_{\underline{x}, \underline{y}}(x, y) &= F_{\underline{x}} \cdot F_{\underline{y}} = \int_{-\infty}^x f_{\underline{x}}(u) du \int_{-\infty}^y f_{\underline{y}}(v) dv = \\ &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\underline{x}}(u) f_{\underline{y}}(v) du dv \text{ (Fubini). Omgekeerd is} \\ F_{\underline{x}, \underline{y}} &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\underline{x}}(u) f_{\underline{y}}(v) du dv = \int_{-\infty}^x f_{\underline{x}}(u) du \cdot \int_{-\infty}^y f_{\underline{y}}(v) dv = \\ &= F_{\underline{x}} \cdot F_{\underline{y}}. \end{aligned}$$

St. 3.3.5: zijn $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ en $\underline{y} = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)$ o.o. vectoren met dichtheden $f_{\underline{x}}$ en $f_{\underline{y}}$ dan heeft de vector $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y} = (\underline{x}_1 + \underline{y}_1, \dots, \underline{x}_n + \underline{y}_n)$ de dichtheid $f_{\underline{z}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{y}}(z-x) f_{\underline{x}}(x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{Bewijs: } P\{\underline{z} \leq z\} &= \int \int_{\underline{x}+\underline{y} \leq z} f_{\underline{x}}(x) f_{\underline{y}}(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{\underline{y}}(y) f_{\underline{x}}(x) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^z f_{\underline{y}}(y-x) f_{\underline{x}}(x) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{y}}(y-x) f_{\underline{x}}(x) dx dy, \text{ dus } \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{y}}(z-x) f_{\underline{x}}(x) dx \text{ is een} \\ &\text{dichtheid bij } F_{\underline{z}}. \end{aligned}$$

Algemener geldt

St. 3.3.6: zijn $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ en $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$ o.o. met verdelingsfuncties $F_{\underline{x}}$ en $F_{\underline{y}}$ dan heeft $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$ de verdelingsfunctie $F_{\underline{z}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\underline{y}}(z-x) dF_{\underline{x}}(x)$.

Bewijs: als we voor $x = (x_1, \dots, x_n)$ definiëren

$$\iota(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

dan geldt voor een verdelingsfunctie $F(x) = F(x_1, \dots, x_n)$, dat $F(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \iota(x_0 - x) dF(x)$. Is $F_{\underline{x}, \underline{y}}$ de verdelingsfunctie van $(\underline{x}, \underline{y})$, dan geldt $F_{\underline{z}}(z) = \iint_{x+y=z} dF_{\underline{x}, \underline{y}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iota(z-x-y) dF_{\underline{x}, \underline{y}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iota(z-x-y) dF_{\underline{x}} dF_{\underline{y}} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\underline{y}}(z-x) dF_{\underline{x}}(x)$.

Opm.: zowel $\int_{-\infty}^{\infty} F(z-x) dG(x)$ als $\int_{-\infty}^{\infty} f(z-x) g(x) dx$ worden met het woord convolutie (resp. van F en G en van f en g) aangeduid en genoteerd als $F * G$ en $f * g$. Men gaat gemakkelijk na, dat beide convolutie-operaties commutatief en associatief zijn en distributief t.o.v. de optelling.

3.4. Verwachting

Ief. 3.4.1: is $\underline{x}$ een stochastische variabele op $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ dan heet $\int_{\Omega} \underline{x}(\omega) dP$ de verwachting van $\underline{x}$. We duiden de verwachting van $\underline{x}$ aan met $\mathcal{E} \underline{x}$.

Opm.: $\mathcal{E} \underline{x}$ is natuurlijk alleen dan gedefinieerd, als de betreffende integraal bestaat, d.w.z. als $\int_{\Omega} |\underline{x}(\omega)| dP < \infty$ is.

Bij de verplanting van $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ naar $(R, \mathcal{G}, P')$ door middel van de afbeelding $y = \underline{x}(\omega)$ gaat de maat P over in P' gedefinieerd op $\mathcal{G}$ door $P'(B) = P\{\omega \mid \underline{x}(\omega) \in B\}$, d.w.z. P' is de door de verdelingsfunctie $F_{\underline{x}}$ geïnduceerde intervalmaat. Met behulp van St. 2.2.3 bewijst men gemakkelijk, dat voor de integraal van een sommeerbare functie $f(x)$ op een maatruimte $(X, \mathcal{G}, \mu)$ geldt, dat $\int_X f(x) d\mu =$

$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-2^{2N}}^{2^{2N}} n 2^{-N} \mu(\{x \mid (n-1)2^{-N} \leq f(x) \leq n 2^{-N}\})$ is. Maar bij de

verplanting $P(\{ \omega \mid (n-1)2^{-N} \leq \underline{x}(\omega) \leq n 2^{-N} \}) =$

$= P'(\{ y \mid (n-1)2^{-N} \leq y \leq n 2^{-N} \})$ is geldt ook $\int_{\Omega} \underline{x}(\omega) dP = \int_R y dP' = \int_{-\infty}^{\infty} y dF_{\underline{x}}.$

We hebben dus

St. 3.4.1 : als $\mathcal{E}_{\underline{x}}$ bestaat, dan is $\mathcal{E}_{\underline{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x} dF_{\underline{x}}$.

Algemener geldt

St. 3.4.2 : is $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ een stochastische vector en is

$\bar{\Phi}(\underline{x})$ een Baire-functie van $\underline{x}$, terwijl $\mathcal{E} \bar{\Phi}(\underline{x})$ bestaat aan is $\mathcal{E} \bar{\Phi}(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}(\underline{x}) dF_{\underline{x}}$.

bewijs: $\bar{\Phi}(x(\omega)) = f(\omega)$ is een meetbare functie op $(\Omega, \mathcal{K}_x, P)$. Bij verplaatsing naar $(R, \mathcal{B}, P')$ door middel van de σ -homomorfie φ gaat $f(\omega)$ over in een Baire-functie $\psi(y)$, waarvoor geldt, dat $\varphi(\{y : \psi(y) \in B\}) = \{\omega : f(\omega) \in B\}$ (iedere $B \in \mathcal{B}$). Men verifieert gemakkelijk, dat men voor ψ de functie $\bar{\Phi}$ kan nemen, immers:
 $\{\omega : f(\omega) \in B\} = \{\omega : \bar{\Phi}(x(\omega)) \in B\} = \{\omega : x(\omega) \in \bar{\Phi}^{-1}(B)\} = \varphi(\{y : y \in \bar{\Phi}^{-1}(B)\}) = \varphi(\{y : \bar{\Phi}(y) \in B\})$. Nu geldt dus ook $P(\{\omega : \bar{\Phi}(x(\omega)) \in B\}) = P'(\{y : \bar{\Phi}(y) \in B\})$, dus speciaal $P(\{\omega : c_1 < \bar{\Phi}(x(\omega)) \leq c_2\}) = P'(\{y : c_1 < \bar{\Phi}(y) \leq c_2\})$, dus evenals boven: $\int_{\Omega} \bar{\Phi}(x(\omega)) dP = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}(y) dF_{\underline{x}}$.

Def. 3.4.2 : is $\underline{x}$ een stochastische variablele, dan heet

$\mu_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E} \underline{x}^k$ het k^{de} moment van $\underline{x}$,

$\tilde{\mu}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E} (\underline{x} - \mu_1)^k$ het k^{de} gereduceerde moment van $\underline{x}$,

$\mu_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E} |\underline{x}|^k$ het k^{e} absolute moment van $\underline{x}$,

$\sigma^2_{\underline{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mu}_2$ de variantie van $\underline{x}$.

Opm. Def. 3.4.2 geldt onder de voorwaarde, dat $\mathcal{E} |\underline{x}|^k$ is. Iets algemener laat men soms de waarden $\pm \infty$ toe. Op grond van St. 3.4.2 geldt natuurlijk $\underline{x}^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_{\underline{x}}$ etc.

In verband met een aantal ongelijkheden voor momenten bewijzen we:

St. 3.4.3 (ongelijkheid van Jensen):

is $f(x)$ convex op het kleinste (eindige of oneindige) interval I , waarvoor geldt:

$$\int_I dF_{\underline{x}} = 1 \text{ en is } \mathcal{E}|\underline{x}| < \infty \text{ en } \mathcal{E}|f(\underline{x})| < \infty, \text{ dan is}$$

$$\mathcal{E} f(\underline{x}) \geq f(\mathcal{E} \underline{x}).$$

Het gelijktteken geldt dan en slechts dan, als $f(x)$ lineair is op I .

Bewijs: een kromme $f(x)$ is dan en slechts dan convex op I , als voor elk punt $x \in I$ geldt, dat door $(x, f(x))$ een rechte kan worden getrokken, die nergens in I "boven" de kromme komt. Geven we de rechte door het punt $(\underline{x}, f(\underline{x}))$ aan met $L(x)$, dan geldt dus $f(x) \leq L(x)$ en dus $\mathcal{E} f(\underline{x}) \leq \mathcal{E} L(\underline{x}) = L(\mathcal{E} \underline{x}) = f(\mathcal{E} \underline{x})$, dus $\mathcal{E} f(\underline{x}) \leq f(\mathcal{E} \underline{x})$. Het is duidelijk, dat $\mathcal{E} f(\underline{x}) = \mathcal{E} L(\underline{x})$ dan en slechts dan, als $f(\underline{x}) = L(\underline{x})$ met kans 1. Daar f en L continu zijn op I is of $f = L$ voor alle $x \in I$ of $f \neq L$ voor alle x in een interval I_0 met $F_{\underline{x}}$ -maat nul. Daar I het kleinste interval is met $\int_I dF_{\underline{x}} = 1$, ligt I_0 in het inwendige van I , d.w.z. zowel links als rechts van I_0 liggen punten met $f(x) = L(x)$, terwijl in I_0 punten liggen met $f > L$. Dit is in strijd met de convexiteit van f . Voor alle $x \in I$ geldt dus $f = L$, dus f is lineair.

Opm.1: als $\underline{x}$ constant is met kans 1, dan bestaat I uit 1 punt. In dit geval is $f(x)$ constant op I en dus (formeel) lineair op I .

Opm.2: men kan St.3.4.3 ook bewijzen, uitgaande van deze definitie van convexiteit: $f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2)$ als $0 \leq p \leq 1$ en $p+q = 1$. Hieruit volgt $f(\sum p_i x_i) \leq \sum p_i f(x_i)$ ($0 \leq p_i \leq 1$; $\sum p_i = 1$). Gebruikmakend van de continuïteit van convexe functies vindt men hieruit door limietovergang het gestelde. Een volkomen analoge stelling geldt natuurlijk voor concave functies.

Passen we St.3.4.3 toe op $f(x) = x^a$ ($0 < a < 1$) voor niet-negatieve x dan vinden we (voor niet-negatieve $\underline{x}$) $\mathcal{E} \underline{x}^a \leq (\mathcal{E} \underline{x})^a$, als $\underline{x}$ niet constant is. Substitutie van $\underline{x} = \underline{y}^s$ levert $\mathcal{E} \underline{y}^{as} \leq (\mathcal{E} \underline{y}^s)^a$ of voor $r=as < s$: $(\mathcal{E} \underline{y}^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\mathcal{E} \underline{y}^s)^{\frac{1}{s}}$. Past men deze laatste ongelijk-

heid toe op $\underline{x}$ met verdelingsfunctie $F_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{y^u} \int_0^x y^u dF_{\underline{y}}$,
zodat $\mathcal{E} \underline{x}^{v-u} = \frac{\mathcal{E} \underline{y}^v}{\mathcal{E} \underline{y}^u}$, dan vindt men voor $0 < u < v < w$

$$\left(\frac{\mathcal{E} \underline{y}^v}{\mathcal{E} \underline{y}^u} \right)^{w-u} < \left(\frac{\mathcal{E} \underline{y}^w}{\mathcal{E} \underline{y}^u} \right)^{v-u} \text{ of } \left(\frac{\mathcal{E} \underline{x}^u}{\mathcal{E} \underline{x}^v} \right)^w \left(\frac{\mathcal{E} \underline{x}^v}{\mathcal{E} \underline{x}^w} \right)^u \left(\frac{\mathcal{E} \underline{x}^w}{\mathcal{E} \underline{x}^u} \right)^v > 1.$$

Passen we deze ongelijkheden toe op de stochastische variabele $|\underline{x}|$, dan vinden we

St.3.4.4: als $|\underline{x}|$ niet constant is, dan geldt

$$a) \left(\mathcal{E} |\underline{x}|^r \right)^{\frac{1}{r}} < \left(\mathcal{E} |\underline{x}|^s \right)^{\frac{1}{s}} \text{ als } r < s$$

$$b) \left(\frac{\mathcal{E} |\underline{x}|^u}{\mathcal{E} |\underline{x}|^v} \right)^w \cdot \left(\frac{\mathcal{E} |\underline{x}|^v}{\mathcal{E} |\underline{x}|^w} \right)^u \cdot \left(\frac{\mathcal{E} |\underline{x}|^w}{\mathcal{E} |\underline{x}|^u} \right)^v > 1 \quad (0 < u < v < w)$$

(ongelijkheid van Lyapunov)

Uit a) volgt $\mathcal{E} \underline{x}^2 > (\mathcal{E} \underline{x})^2$, dus $\sigma^2 \underline{x} > 0$ als $\underline{x}$ niet constant is.

De ongelijkheid van Chebyshev werd al op pag.119 bewezen:

$$P(\{\omega \mid |x(\omega)| > c\}) \leq \frac{1}{c} \int_{\Omega} |x(\omega)| dP \quad (c > 0)$$

of anders geschreven

$$P\{|\underline{x}| > c\} \leq \frac{1}{c} \mathcal{E} |\underline{x}|.$$

Voor $\underline{x} = (\underline{y} - \mu_1)^2$ wordt dit $P\{|\underline{y} - \mu| > d\} \leq \frac{\sigma^2 \underline{x}}{d^2}$ (ongelijkheid van Bienaymé-Chebyshev).

Voor $\underline{x} = \underline{y}^k$ vindt men $P\{|\underline{y}| > d\} \leq \frac{|\mu|/k}{d^k}$.

Def.3.4.3: is $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ een stochastische vector, dan definiëren we

$$\mathcal{E} \underline{x} = (\mathcal{E} \underline{x}_1, \dots, \mathcal{E} \underline{x}_n),$$

$\mu_{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E} \underline{x}_1^{k_1} \dots \underline{x}_n^{k_n}$ heet een gemengd moment van de orde $\sum_{j=1}^n k_j$.

Analoog definieert men gereduceerde en absolute gemengde momenten.

Uit St.3.4.2 volgt $k_1 \dots k_n = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} dF_{\underline{x}}.$

Def.3.4.4: zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ stochastische variabelen, dan heet $\mathcal{E}(\underline{x} - \mathcal{E}\underline{x})(\underline{y} - \mathcal{E}\underline{y})$ de covariantie van $\underline{x}$ en $\underline{y}$,
notatie: $\text{cov}(\underline{x}, \underline{y})$. Is $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ een stochastische vector dan heet de matrix met elementen $\tilde{\mathcal{M}}_{ij}$ de covariantie-matrix bij $\underline{x}$, aangeduid met $C(\underline{x})$.

St.3.4.5: zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ o.o. dan is $\mathcal{E} \underline{x} \underline{y} = \mathcal{E} \underline{x} \mathcal{E} \underline{y}$.

Bewijs: $\mathcal{E} \underline{x} \underline{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy dF_{\underline{x}, \underline{y}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy dF_{\underline{x}} dF_{\underline{y}} = \mathcal{E} \underline{x} \cdot \mathcal{E} \underline{y}$ (Fubini).

Uit St.3.4.5 volgt onmiddellijk

St.3.4.6: als $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ en $\underline{y} = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)$ o.o. zijn dan geldt $C(\underline{x} + \underline{y}) = C(\underline{x}) + C(\underline{y})$.

Een speciaal geval van St.3.4.6 is

$$\sigma^2(\underline{x} + \underline{y}) = \sigma^2 \underline{x} + \sigma^2 \underline{y} \quad \text{als } \underline{x} \text{ en } \underline{y} \text{ o.o. zijn.}$$

Men bewijst verder zonder moeite

St.3.4.7: voor ieder tweetal stochastische variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ geldt $\mathcal{E}(\underline{x} + \underline{y}) = \mathcal{E} \underline{x} + \mathcal{E} \underline{y}$.

Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ o.o. en schrijven we $\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \mathcal{E} \underline{x}$ en $\tilde{\underline{y}} = \underline{y} - \mathcal{E} \underline{y}$ dan is $(\tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{y}})^2 = \tilde{\underline{x}}^2 + \tilde{\underline{y}}^2$ en $(\tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{y}})^3 = \tilde{\underline{x}}^3 + \tilde{\underline{y}}^3$.

Als toepassing van de ongelijkheid van Bienaymé-Chebyshev. bewijzen we

St. 3.4.8: (Stelling van Bernoulli): zijn $\underline{x}_j$ ($j=1, 2, \dots$) o.o. stochastische grootheden, die met kansen p en q de waarden 1 en 0 aannemen, dan geldt voor elke $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \underline{x}_j - p\right| > \epsilon\right\} = 0$$

bewijs: $\mathcal{E} \underline{x}_j = p$, $\sigma^2 \underline{x}_j = p - p^2 = pq$, dus $\mathcal{E} \frac{1}{n} \sum \underline{x}_j = p$ en $\sigma^2(\frac{1}{n} \sum \underline{x}_j) = \frac{pq}{n}$. Toepassing van de ongelijkheid van Bienaymé-Chebyshev levert $P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum \underline{x}_j - p\right| > \epsilon\right\} \leq \frac{pq}{n\epsilon^2}$.

Op dezelfde manier bewijst men

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \underline{x}_j - p\right| > \epsilon\right\} = 0,$$

als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ 0.0. stochastische variabelen zijn met $E \underline{x}_j = \mu$ en $\sigma^2 \underline{x}_j = \sigma^2 < \infty$.

Zonder bewijs vermelden we de volgende generalisatie van de ongelijkheid van Bienaymé-Chebyshev:

$$\text{St. 3.4.9: } P \{ \underline{x}_1 \leq c_1, \underline{x}_2 \leq c_2 \} \geq 1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_1^2}{c_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{c_2^2} + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{c_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{c_2^2} - \frac{4\gamma}{c_1 c_2}} \right\},$$

waarin $\gamma = \text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$

Voor onafhankelijke variabelen geldt nog

St. 3.4.10: als $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ 0.0. zijn, terwijl $E \underline{x}_j = 0$ is, dan geldt

$$P \{ \max_j | \underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_j | > c \} \leq \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{c^2}$$

(de ongelijkheid van Kolmogorov).

bewijs: zij $A = \{ \max_j | \underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_j | > c \}$ en

$$A_j = \{ | \underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_j | > c \} \bigcap_{k=1}^{j-1} \{ | \underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_k | \leq c \}, \text{ zodat } A = \bigcup_{j=1}^n A_j, \text{ waarbij}$$

de A_j disjunct zijn. Zij verder χ_j de karakteristieke functie van A_j : $\chi_j(\omega) = 1$ als $\omega \in A_j$, 0 anders. Nu is $P(A_j) = E \chi_j$.

Definiëren we $\underline{y}_j = \underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_j$, dan is

$$E \chi_j \underline{y}_n^2 = E \chi_j (\underline{y}_j + \underline{y}_n - \underline{y}_j)^2 = E \chi_j \underline{y}_j^2 + 2 E \chi_j \underline{y}_j (\underline{y}_n - \underline{y}_j) + E \chi_j (\underline{y}_n - \underline{y}_j)^2.$$

Nu is $E \chi_j \underline{y}_j (\underline{y}_n - \underline{y}_j) = 0$ (omdat $\chi_j \underline{y}_j$ en $\underline{y}_n - \underline{y}_j$ 0.0. zijn) en

$E \chi_j (\underline{y}_n - \underline{y}_j)^2 = 0$. Tenslotte is $\underline{y}_j^2 \leq c^2$ als $\chi_j = 1$, dus

$E \chi_j \underline{y}_n^2 \geq c^2 E \chi_j = c^2 P(A_j)$. Sommatie over j levert

$$P(A) \leq \frac{1}{c^2} E \sum \chi_j \underline{y}_n^2 \leq \frac{1}{c^2} E \underline{y}_n^2 = \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{c^2}.$$

Opm.: een direct gevolg van de ongelijkheid van Bienaymé-Chebyshev is de zwakkere ongelijkheid

$$P(A) \leq \frac{\sigma_1^2 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \dots + (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)}{c^2}.$$

3.5. Voorwaardelijke verwachting

Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansveld en zij $B \in \mathcal{A}$ een eventualiteit met $P(B) > 0$. We kunnen dan voor elke $A \in \mathcal{A}$ de voorwaardelijke waarschijnlijkheid $P(A|B)$ op de gebruikelijke wijze definiëren:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Omdat de aldus op $\mathcal{A}$ gedefiniëerde verzamelingsfunctie $P(\cdot|B)$ een waarschijnlijkheid is, kunnen we vervolgens de voorwaardelijke verwachting $\mathcal{E}(\underline{x}|B)$ van een stochastische grootheid $\underline{x}$ gegeven B invoeren door

$$\mathcal{E}(\underline{x}|B) = \int \underline{x}(\omega) P(d\omega|B)$$

te stellen, mits deze integraal bestaat. Omdat $P(\bar{B}|B) = 0$ en $P(A|B) = P(A)/P(B)$ voor alle $A \in \mathcal{A}$ met $A \subset B$, volgt hieruit dat

$$\mathcal{E}(\underline{x}|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B \underline{x}(\omega) P(d\omega),$$

zodat

$$(3.5.1) \quad P(B) \cdot \mathcal{E}(\underline{x}|B) = \int_B \underline{x}(\omega) P(d\omega).$$

Omgekeerd kunnen we ook (3.5.1) als definitie voor $\mathcal{E}(\underline{x}|B)$ nemen en daarna de voorwaardelijke waarschijnlijkheid invoeren door

$$P(A|B) = \mathcal{E}(\chi_A|B)$$

te stellen. Men kan zonder moeite nagaan dat de beide methoden van invoeren van de voorwaardelijke verwachting en waarschijnlijkheid equivalent zijn.

Zij nu $\mathcal{B}_0 = \{B_n\}$ een eindig of aftelbaar categorisch systeem van eventualiteiten met alle $P(B_n) > 0$, en zij $\underline{x}$ een integreerbare stochastische grootheid, zodat voor elke B_n de bijbehorende voorwaardelijke verwachting $\mathcal{E}(\underline{x}|B_n)$ gedefiniëerd is. We kunnen al deze voorwaardelijke verwachtingen dan samenvatten in één functie $\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}|\mathcal{B}_0)$

op Ω ^{*)}, die per definitie op B_n de waarde $\underline{E}(x|B_n)$ aanneemt:

$$\underline{E}_\omega(x|\mathcal{B}_0) = \sum_n \chi_{B_n}(\omega) \underline{E}(x|B_n).$$

Als $\mathcal{B}$ de minimale σ -algebra over $\mathcal{B}_0$ is, dan is het gemakkelijk in te zien dat $\underline{E}(x|\mathcal{B}_0)$ een $\mathcal{B}$ -meetbare functie is. Voorts blijkt dat $\underline{E}(x|B)$ niet alleen voor alle $B \in \mathcal{B}_0$, maar zelfs voor alle $B \in \mathcal{B}$ bepaald is door $\underline{E}(x|\mathcal{B}_0)$. Immers, $B \in \mathcal{B}$ dan en dan alleen als B een disjuncte vereniging van de vorm $B = \bigcup_k B_{n_k}$ is, en dan geldt

$$\begin{aligned} P(B) \underline{E}(x|B) &= \int_B x(\omega) P(d\omega) = \sum_k \int_{B_{n_k}} x(\omega) P(d\omega) = \\ &= \sum_k P(B_{n_k}) \underline{E}(x|B_{n_k}), \end{aligned}$$

hetgeen we ook als

$$(3.5.2) \quad P(B) \underline{E}(x|B) = \int_B \underline{E}_\omega(x|\mathcal{B}_0) P(d\omega)$$

kunnen schrijven. We zullen daarom voortaan $\underline{E}(x|\mathcal{B})$ schrijven in plaats van $\underline{E}(x|\mathcal{B}_0)$ en spreken van de voorwaardelijke verwachting van x gegeven de σ -algebra $\mathcal{B}$.

Op grond van (3.5.1) en (3.5.2) en het feit dat een functie op Ω dan en slechts dan $\mathcal{B}$ -meetbaar is als hij op elke $B \in \mathcal{B}_0$ constant is, kunnen we de definitie van $\underline{E}(x|\mathcal{B})$ ook als volgt formuleren:

Definitie 3.5.1: De voorwaardelijke verwachting van een integreerbare stochastische grootheid x gegeven een σ -algebra $\mathcal{B}$, die door een eindig of aftelbaar categorisch systeem van $\mathcal{B}_0 = \{B_n\}$ van eventualiteiten B_n met $P(B_n) > 0$ wordt voortgebracht, is die $\mathcal{B}$ -meetbare functie $\underline{E}(x|\mathcal{B})$ op Ω , die voor alle $B \in \mathcal{B}$ voldoet aan

*) Om de notatie niet onnodig ingewikkeld te maken schrijven we $\underline{E}(x|\mathcal{B}_0)$ in plaats van $\underline{E}(x|\mathcal{B}_0)$.

$$(3.5.3) \quad \int_B \mathcal{E}_\omega(\underline{x}|\mathcal{B}) P(d\omega) = \int_B x(\omega) P(d\omega).$$

Als $P(B_n) = 0$ voor één of meer der $B_n \in \mathcal{B}_0$, dan is er niet één, doch een hele klasse van $\mathcal{B}$ -meetbare functies op Ω die voor alle $B \in \mathcal{B}$ aan (3.5.3) voldoen.

Al deze functies zijn echter equivalent in de zin dat ze onderling slechts verschillen op één of meer der $B_n \in \mathcal{B}_0$ met $P(B_n) = 0$, d.w.z. op verzamelingen met waarschijnlijkheid nul. De volgende generalisatie ligt daarom voor de hand.

Definitie 3.5.2: De voorwaardelijke verwachting van een integreerbare stochastische grootheid $\underline{x}$ gegeven een σ -algebra $\mathcal{B}$, die wordt voortgebracht door een eindig of aftelbaar categorisch systeem van eventualiteiten, is de klasse van alle $\mathcal{B}$ -meetbare functies $\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}|\mathcal{B})$ die voor alle $B \in \mathcal{B}$ aan (3.5.3) voldoen.

Een stochastische grootheid $\underline{y}$ induceert in Ω een categorisch systeem $\mathcal{B}_0$ van eventualiteiten, dat bestaat uit de niet lege verzamelingen van de vorm $\{\underline{y} = y\}$. Als $\mathcal{B}_0$ eindig of aftelbaar is, d.w.z. als $\underline{y}$ op Ω hoogstens aftelbaar veel waarden aanneemt, dan noemt men de voorwaardelijke verwachting van een integreerbare stochastische grootheid $\underline{x}$ gegeven de σ -algebra $\mathcal{B}$ welke door $\mathcal{B}_0$ wordt voortgebracht ook wel de voorwaardelijke verwachting van $\underline{x}$ gegeven $\underline{y}$, en een representant of versie van deze voorwaardelijke verwachting wordt aangegeven met $\mathcal{E}(\underline{x}|\underline{y})$ in plaats van $\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}|\mathcal{B})$.

Deze definitie vindt zijn rechtvaardiging in het feit dat nu voor alle y met $P\{\underline{y} = y\} > 0$ geldt dat

$$\mathcal{E}_\omega(\underline{x}|\underline{y}) = \mathcal{E}(\underline{x} | \underline{y} = y) \quad \text{als} \quad \omega \in \{\underline{y} = y\},$$

ongeacht welke versie we kiezen in het linkerlid. Als we deze definitie trachten uit te breiden tot het geval dat $\underline{y}$ overaftelbaar veel waarden aanneemt, dan wordt de

in Definitie 3.5.2.gestelde eis, dat $\mathcal{B}$ door een hoogstens aftelbaar categorisch systeem van eventualiteiten gegenereerd wordt, een wezenlijke beperking. We zullen daarom deze eis laten vallen en vervolgens bewijzen dat de aldus verkregen definitie nog steeds zinvol is.

Definitie 3.5.3: De voorwaardelijke verwachting van een integreerbare stochastische grootheid $\underline{x}$ gegeven een σ -algebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ is de klasse van alle $\mathcal{B}$ -meetbare functies $\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})$ op Ω , die voor alle $B \in \mathcal{B}$ voldoen aan

$$(3.5.3) \quad \int_B \underline{E}_\omega(\underline{x}|\mathcal{B}) P(d\omega) = \int_B x(\omega) P(d\omega).$$

Stelling 3.5.1: Definitie 3.5.3. is zinvol, d.w.z. onder de daar gemaakte veronderstellingen is de beschreven klasse niet leeg; twee versies, d.w.z. twee elementen van deze klasse verschillen slechts op een verzameling $B \in \mathcal{B}$ met $P(B) = 0$.

Bewijs: Zij $\varphi(B)$ voor $B \in \mathcal{B}$ gedefiniëerd door

$$\varphi(B) = \int_B x(\omega) P(d\omega).$$

Als $\underline{x}$ sommeerbaar is, dan is φ een eindige σ -additieve verzamelingsfunctie op $\mathcal{B}$, die absoluut continu is t.o.v. de restrictie $P_{\mathcal{B}}$ van P op $\mathcal{B}$ (d.w.z. $P_{\mathcal{B}}(B) = 0 \Rightarrow \varphi(B) = 0$). De stelling van Radon-Nikodym (St. 2.4.5) is dus van toepassing op de verzamelingsfunctie φ en de maatruimte $(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$, zodat er een $\mathcal{B}$ -meetbare functie $\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})$ is, zodanig, dat voor alle $B \in \mathcal{B}$

$$\varphi(B) = \int_B \underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}) P_{\mathcal{B}}(d\omega).$$

Aangezien we in het rechterlid $P_{\mathcal{B}}$ door P mogen vervangen, is $\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})$ een functie die aan onze eisen voldoet.

Als $\underline{x}$ niet sommeerbaar, doch slechts integreerbaar is, dan is φ niet eindig, zelfs niet noodzakelijk σ -finiet (neem b.v. $\mathcal{B} = \{0, \Omega\}$), maar wel σ -additief

en $P_{\mathcal{B}}$ -absoluut continu. De stelling van Radon-Nikodym blijft echter van toepassing, mits we voor $\underline{E}(x|\mathcal{B})$ de waarden $\pm\infty$ toelaten (zie b.v. Halmos blz. 131 of Loève blz. 133), zodat de eerste bewering bewezen is.

Stel nu dat $\underline{E}(x|\mathcal{B})$ en $\underline{E}'(x|\mathcal{B})$ twee versies van de voorwaardelijke verwachting van x gegeven $\mathcal{B}$ zijn, en dat $P\{\underline{E}(x|\mathcal{B}) \neq \underline{E}'(x|\mathcal{B})\} > 0$. We mogen dan veronderstellen dat de verzameling $B_0 = \{\omega) \underline{E}_{\omega}(x|\mathcal{B}) > \underline{E}'_{\omega}(x|\mathcal{B})\}$, positieve $P_{\mathcal{B}}$ -waarschijnlijkheid heeft. Maar dan is er een $\delta > 0$, zodat $B_{\delta} = \{\omega) \underline{E}_{\omega}(x|\mathcal{B}) > \underline{E}'_{\omega}(x|\mathcal{B}) + \delta\}$ eveneens positieve $P_{\mathcal{B}}$ -waarschijnlijkheid heeft, zodat

$$\int_{B_{\delta}} \underline{E}_{\omega}(x|\mathcal{B}) P_{\mathcal{B}}(d\omega) > \int_{B_{\delta}} \underline{E}'_{\omega}(x|\mathcal{B}) P(d\omega).$$

Omdat beide leden van deze ongelijkheid echter per definitie gelijk zijn aan $\varphi(B_{\delta})$ hebben we een tegenspraak verkregen, zodat ook de tweede bewering bewezen is.

Definitie 3.5.4: De voorwaardelijke waarschijnlijkheid van een eventualiteit $A \in \mathcal{A}$ gegeven een σ -algebra $\mathcal{B}$ is de voorwaardelijke verwachting van χ_A gegeven $\mathcal{B}$; in formule:

$$\underline{P}(A|\mathcal{B}) = \underline{E}(\chi_A|\mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Zij $(\Omega', \mathcal{A}')$ een meetbare ruimte, d.w.z. een verzameling Ω' , waarin een σ -algebra $\mathcal{A}'$ gegeven is, en zij $\underline{y}$ een functie op het kansveld $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ met waarden in Ω' , die meetbaar is (t.o.v. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}'$), d.w.z. zodanig, dat $\underline{y}^{-1}(A') = \{ \underline{y} \in A' \} \in \mathcal{A}$ voor alle $A' \in \mathcal{A}'$. Omdat de afbeelding $\underline{y}^{-1}$ van $\mathcal{A}'$ in $\mathcal{A}$ operatiegetrouw is voor alle operaties op verzamelingen, is de klasse $\mathcal{B}$ van alle verzamelingen van de vorm $\underline{y}^{-1}(A')$ met $A' \in \mathcal{A}'$ een σ -algebra van eventualiteiten. We zeggen dat $\underline{y}$ de σ -algebra $\mathcal{B}$ in Ω induceert.

Definitie 3.5.5: De voorwaardelijke verwachting van een integreerbare stochastische grootheid x gegeven een meetbare functie $\underline{y}$ op het kansveld $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ met

waarden in een meetbare ruimte $(\Omega', \mathcal{A}')$, is de voorwaardelijke verwachting van $\underline{x}$ gegeven de σ -algebra $\mathcal{B}$ die door $\underline{y}$ in Ω geïnduceerd wordt:

$$\mathcal{E}(\underline{x}|\underline{y}) = \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}|\mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Van bijzonder belang is het geval dat $\underline{y} = (\underline{y}_t, t \in T)$ een collectie stochastische grootheden is, m.a.w. dat $\Omega' = \prod_{t \in T} R_t$ een (eindig, aftelbaar of overaftelbaar) Cartesisch product van de reële rechte met zichzelf is en $\mathcal{A}'$ de bijbehorende σ -algebra van Borel-verzamelingen is. Zo krijgen, mede via Definitie 3.5.4, symbolen als $\mathcal{E}(\underline{x}|\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)$, $P(A|\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)$, $\mathcal{E}(\underline{x}|\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots)$, $P(A|\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots)$, $\mathcal{E}(\underline{x}|\underline{y}_t, t \in T)$ en $P(A|\underline{y}_t, t \in T)$ betekenis als versies van voorwaardelijke verwachtingen en waarschijnlijkheden.

Als in het bijzonder de indexverzameling T eindig of aftelbaar is, dan zijn de éénpuntsverzamelingen van Ω' elementen van $\mathcal{A}'$. Omdat de afbeelding $\underline{y}^{-1}$ van $\mathcal{A}'$ op $\mathcal{B}$ operatiegetrouw is, volgt hieruit dat de verzamelingen van de vorm $\{\underline{y} = y\}$ atomen van $\mathcal{B}$ zijn in de zin dat ze tot $\mathcal{B}$ behoren en in $\mathcal{B}$ geen echte deelverzamelingen hebben. Dit houdt in dat elke versie van een voorwaardelijke verwachting gegeven $\underline{y}$ constant is op elke verzameling van de vorm $\{\underline{y} = y\}$, en dus als een functie van de functie $\underline{y}$ geschreven kan worden. Als T echter overaftelbaar is, dan behoren de éénpuntsverzamelingen van Ω' niet meer tot $\mathcal{A}'$, zodat deze redenering niet meer van toepassing is. Toch blijkt dat, zelfs in het meest algemene geval, elke voorwaardelijke verwachting gegeven $\underline{y}$ een versie heeft die geschreven kan worden als een functie, en wel een meetbare functie, van de functie $\underline{y}$. Voor het bewijs hiervan heeft men de volgende generalisatie van de verplantingsstelling nodig.

Stelling 3.5.2: Zij $\underline{y}$ een meetbare functie op het kansveld $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ met waarden in de meetbare ruimte $(\Omega', \mathcal{A}')$ en zij P' op $\mathcal{A}'$ gedefiniëerd door de gelijk-

heid $P'(A') = P(\underline{y} \in A')$ voor alle $A' \in \mathcal{A}'$. Dan is

$$\int g(\omega') P'(d\omega') = \int g(y(\omega)) P(d\omega)$$

voor elke meetbare functie g op Ω' met waarden in $[-\infty, +\infty]$, in de zin dat de beide integralen bestaan en gelijk zijn, zodra één van hen bestaat.

Bewijs: Als $g = \chi_{A'}$, met $A' \in \mathcal{A}'$, dan geldt

$$\int g(\omega') P(d\omega') = P'(A') = P(\underline{y} \in A')$$

en

$$\int g(y(\omega)) P(d\omega) = P(\underline{y} \in A'),$$

zodat beide integralen bestaan en gelijk zijn. Dit is dan ook het geval als g een lineaire combinatie met eindige coëfficiënten van zulke indicatorfuncties is, en dus ook als g een willekeurige niet-negatieve meetbare functie is. Het algemene geval volgt nu uit het feit dat g in zijn positieve en negatieve delen gesplitst kan worden.

Stelling 3.5.3: Zij $\underline{x}$ een P -integreerbare stochastische grootte en $\underline{y}$ een meetbare functie op het kansveld $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ met waarden in de meetbare ruimte $(\Omega', \mathcal{A}')$. Er is dan een meetbare functie g op $(\Omega', \mathcal{A}')$ met waarden in $[-\infty, +\infty]$ zodat de functie $g(y(\cdot))$ een versie van de voorwaardelijke verwachting van $\underline{x}$ gegeven $\underline{y}$ is, m.a.w. zodat

$$\xi_{\omega}(\underline{x}|\underline{y}) = g(y(\omega)) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.},$$

waar $\mathcal{B}$ de door $\underline{y}$ in Ω geïnduceerde σ -algebra is.

Bewijs: We definiëren de waarschijnlijkheid P' op $\mathcal{A}'$ als boven, en voorts twee verzamelingsfuncties, te weten φ op $\mathcal{B}$ en φ' op $\mathcal{A}'$:

$$\varphi(B) = \int_B \underline{x}(\omega) P(d\omega) \quad \text{voor } B \in \mathcal{B}$$

$$\varphi'(A') = \varphi(\underline{y} \in A') \quad \text{voor } A' \in \mathcal{A}',$$

zodat φ' een σ -additieve P' -absoluut continue verzamelingsfunctie is. Evenals in het bewijs van Stelling 3.5.1 kunnen we dus op grond van de gegeneraliseerde stelling van Radon-Nikodym besluiten dat er een meetbare functie g op $(\Omega', \mathcal{A}')$ is met waarden in $[-\infty, +\infty]$, zodanig dat voor alle $A' \in \mathcal{A}'$

$$\varphi'(A') = \int_{A'} g(\omega') P'(d\omega'),$$

zodat, op grond van Stelling 3.5.2,

$$\int_{\{\underline{y} \in A'\}} x(\omega) P(d\omega) = \varphi(\underline{y} \mid A') = \varphi'(A') = \int_{A'} g(\omega') P'(d\omega') = \int_{\{\underline{y} \in A'\}} g(y(\omega)) P(d\omega)$$

voor alle $A' \in \mathcal{A}'$. Omdat $\mathcal{B} = \{\{\underline{y} \in A'\} \mid A' \in \mathcal{A}'\}$ en omdat $g(y(\cdot))$ als een meetbare functie van een $\mathcal{B}$ -meetbare functie zelf ook $\mathcal{B}$ -meetbaar is, volgt hieruit dat $g(y(\cdot))$ een versie van de voorwaardelijke verwachting van $\underline{x}$ gegeven $\underline{y}$ is.

Voorbeeld: Stel dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ twee stochastische grootheden zijn wier simultane verdeling een dichtheid f heeft. Laat t een reële meetbare functie op R zijn, zodanig dat $\underline{z} = t(\underline{x})$ integreerbaar is. Dan is

$$\underline{E}(\underline{z} \mid \underline{y}) = \frac{\int t(\underline{x}) f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x}}{\int f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x}} \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.},$$

waar $\mathcal{B}$ de door $\underline{y}$ in Ω geïnduceerde σ -algebra is. Immers, met behulp van de stelling van Fubini is gemakkelijk in te zien dat de uitdrukking in het rechterlid $P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$ gedefiniëerd en gelijk aan een $\mathcal{B}$ -meetbare functie is, terwijl voor iedere $B \in \mathcal{B}$, d.w.z. voor iedere $B \in \mathcal{A}$ van de vorm $B = \{\underline{y} \in S\}$ met S een Borelverzameling in R ,

$$\int_B \frac{\int t(\underline{x}) f(\underline{x}, y(\omega)) d\underline{x}}{\int f(\underline{x}, y(\omega)) d\underline{x}} P(d\omega) = \int_{\underline{y} \in B} \int_{\underline{v} \in S} \frac{\int t(\underline{x}) f(\underline{x}, \underline{v}) d\underline{x}}{\int f(\underline{x}, \underline{v}) d\underline{x}} f(\underline{u}, \underline{v}) d\underline{u} d\underline{v} =$$

$$= \int_S \left\{ \int t(x) f(x, v) dx \right\} dv = \int_B t(x(\omega)) P(d\omega).$$

In hoofdstuk 2 werd de volgende stelling bewezen (blz. 118, I 5): Als op een maatruimte $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ twee functies f en g μ -b.o. gedefiniëerd zijn en gelijk zijn aan twee sommeerbare functies, dan is ook hun som μ -b.o. gedefiniëerd en gelijk aan een sommeerbare functie, en $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$. We zullen herhaaldelijk de volgende generalisatie van deze stelling gebruiken.

Stelling 3.5.4: Als op een maatruimte $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ twee functies f en g μ -b.o. gedefiniëerd zijn en gelijk zijn aan twee integreerbare functies, terwijl bovendien de som $\int f d\mu + \int g d\mu$ gedefiniëerd is, d.w.z. niet van de vorm $\infty - \infty$ is, dan is ook hun som μ -b.o. gedefiniëerd en gelijk aan een integreerbare functie, en $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

Bewijs:

a) Als $f \geq 0$ en $g \geq 0$ μ -b.o., dan is de stelling triviaal. Immers, of de beide integralen zijn eindig, zodat de boven geciteerde stelling uit hoofdstuk 2 van toepassing is, of één van deze integralen, zeg $\int f d\mu = +\infty$. Maar dan is $\int (f+g) d\mu \geq \int f d\mu = +\infty = \int f d\mu + \int g d\mu$.

b) Omdat $\int f d\mu + \int g d\mu$ gedefiniëerd is, geldt of $\int f d\mu > -\infty$, $\int g d\mu > -\infty$, of $\int f d\mu < +\infty$, $\int g d\mu < +\infty$, en het is voldoende het bewijs te leveren voor het eerste geval. Dan is $f > -\infty$ en $g > -\infty$ μ -b.o., zodat $(f+g)$ μ -b.o. gedefiniëerd is. Door f en g eventueel op μ -nulverzamelingen te veranderen, kunnen we dus verder veronderstellen dat f , g en $(f+g)$ overal op Ω gedefiniëerd zijn. Op grond van a) kunnen we schrijven

$$\begin{aligned}
 \int (f+g)^+ d\mu &= \int (f^+ + g^+) \chi_{\{f \geq 0, g \geq 0\}} d\mu + \\
 &+ \int (f^+ - g^-) \chi_{\{g < 0, f+g \geq 0\}} d\mu + \int (g^+ - f^-) \chi_{\{f < 0, f+g \geq 0\}} d\mu = \\
 &= \int f^+ \chi_{\{f+g \geq 0\}} d\mu + \int g^+ \chi_{\{f+g \geq 0\}} d\mu - \int f^- \chi_{\{f+g \geq 0\}} d\mu + \\
 &- \int g^- \chi_{\{f+g \geq 0\}} d\mu,
 \end{aligned}$$

waarbij het van essentieel belang is dat de laatste twee termen eindig zijn. Op dezelfde manier vinden we

$$\begin{aligned}
 \int (f+g)^- d\mu &= \int f^- \chi_{\{f+g < 0\}} d\mu + \int g^- \chi_{\{f+g < 0\}} d\mu + \\
 &- \int f^+ \chi_{\{f+g < 0\}} d\mu - \int g^+ \chi_{\{f+g < 0\}} d\mu,
 \end{aligned}$$

waarin alle vier termen eindig zijn. Hieruit volgt dat $(f+g)$ integreerbaar is, en, met behulp van a), dat

$$\begin{aligned}
 \int (f+g) d\mu &= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu = \\
 &= \int f d\mu + \int g d\mu.
 \end{aligned}$$

We keren nu terug tot ons kansveld $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, waarbij we veronderstellen dat $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ een gegeven σ -algebra is.

Stelling 3.5.5: Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ integreerbare stochastische grootheden zijn, dan geldt:

- a) $\underline{x} = x \text{ P - b.o.} \implies \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}|\mathcal{B}) = x \text{ P}_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$
- b) $\underline{x} \geq \underline{y} \text{ P - b.o.} \implies \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}|\mathcal{B}) \geq \underline{\mathcal{E}}(\underline{y}|\mathcal{B}) \text{ P}_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$
- c) $-\infty < a < +\infty \implies \underline{\mathcal{E}}(a\underline{x}|\mathcal{B}) = a \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}|\mathcal{B}) \text{ P}_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$
- d) $\underline{\mathcal{E}} \underline{x} + \underline{\mathcal{E}} \underline{y}$ gedefiniëerd $\implies \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}+\underline{y}|\mathcal{B}) = \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}|\mathcal{B}) + \underline{\mathcal{E}}(\underline{y}|\mathcal{B}) \text{ P}_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$

Bewijs: a). Triviaal.

- b). Als de verzameling $B = \{\omega | \mathcal{E}_{\omega}(\underline{x}|\mathcal{B}) < \mathcal{E}_{\omega}(\underline{y}|\mathcal{B})\}$ positieve waarschijnlijkheid zou hebben, dan zou

$$\int_B \mathcal{E}_{\omega}(\underline{x}|\mathcal{B}) P(d\omega) < \int_B \mathcal{E}_{\omega}(\underline{y}|\mathcal{B}) P(d\omega),$$

en dus, omdat $B \in \mathcal{B}$, zou dan ook

$$\int_B x(\omega) P(d\omega) < \int_B y(\omega) P(d\omega),$$

hetgeen in strijd is met het gegeven.

c). volgt uit het feit dat, voor alle $B \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} \int_B ax(\omega) P(d\omega) &= a \int_B x(\omega) P(d\omega) = \\ &= a \int_B \mathcal{E}_\omega(\underline{x}|\mathcal{B}) P(d\omega) = \int_B a \mathcal{E}_\omega(\underline{x}|\mathcal{B}) P(d\omega). \end{aligned}$$

d). Uit Stelling 3.5.4, toegepast op $\underline{x}$ en $\underline{y}$ op $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en $\mathcal{E}(\underline{x}|\mathcal{B})$ en $\mathcal{E}(\underline{y}|\mathcal{B})$ op $(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$, volgt dat $(\underline{x} + \underline{y})$ en $\{ \mathcal{E}(\underline{x}|\mathcal{B}) + \mathcal{E}(\underline{y}|\mathcal{B}) \}$ b.o. gedefiniëerd en integreerbaar zijn.

$$\begin{aligned} \text{Eveneens uit Stelling 3.5.4 volgt dat, voor} \\ \text{alle } B \in \mathcal{B}, \int_B \{ \mathcal{E}_\omega(\underline{x}|\mathcal{B}) + \mathcal{E}_\omega(\underline{y}|\mathcal{B}) \} P(d\omega) = \\ = \int_B \mathcal{E}_\omega(\underline{x}|\mathcal{B}) P(d\omega) + \int_B \mathcal{E}_\omega(\underline{y}|\mathcal{B}) P(d\omega) = \\ = \int_B x(\omega) P(d\omega) + \int_B y(\omega) P(d\omega) = \\ = \int_B \{ x(\omega) + y(\omega) \} P(d\omega). \end{aligned}$$

Stelling 3.5.6 (monotone convergentie): Als $\{ \underline{x}_n \}$ een rij stochastische grootheden is en $\underline{y}$ een sommeerbare stochastische grootheid is, dan geldt:

$$\underline{y} \leq \underline{x}_n \uparrow \underline{x} \leq \infty \quad P - \text{b.o.} \implies \mathcal{E}(\underline{x}_n|\mathcal{B}) \uparrow \mathcal{E}(\underline{x}|\mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Bewijs: Uit het gegeven en Stelling 3.5.5 b) volgt dat de $\underline{x}_n$ integreerbaar zijn en dat de rij $\{ \mathcal{E}(\underline{x}_n|\mathcal{B}) \}$ $P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$ monotoon niet-dalend is en dus $P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$ convergeert naar een limiet $\underline{x}'$. Door nu de monotone convergentie stelling voor integralen toe te passen op beide leden van de gelijkheid

$$\int_B \underline{x}_n(\omega) P(d\omega) = \int_B \mathcal{E}_\omega(\underline{x}_n|\mathcal{B}) P(d\omega) \quad (B \in \mathcal{B}),$$

krijgen we

$$\int_B x(\omega) P(d\omega) = \int_B x'(\omega) P(d\omega)$$

voor alle $B \in \mathcal{B}$, zodat $\underline{x}' = \mathcal{E}(\underline{x}|\mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$

Stelling 3.5.7 (Fatou): Als $\{\underline{x}_n\}$ een rij stochastische grootheden is en $\underline{y}$ een sommeerbare stochastische grootheid is, dan geldt:

$$\underline{y} \leq \inf \underline{x}_n \text{ P - b.o.} \implies \underline{\mathcal{E}}(\liminf \underline{x}_n | \mathcal{B}) \leq \liminf \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_n | \mathcal{B}) \text{ P}_{\mathcal{B}} \text{ - b.o.}$$

Bewijs: Zij $\underline{y}_n = \inf_{k \geq n} \underline{x}_k$, zodat

$$\underline{y} \leq \underline{y}_n \uparrow \liminf \underline{x}_n \text{ P - b.o. en } \underline{x}_n \geq \underline{y}_n \text{ voor alle } n.$$

Uit de monotone convergentie stelling volgt dan

$$\liminf \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_n | \mathcal{B}) \geq \lim \underline{\mathcal{E}}(\underline{y}_n | \mathcal{B}) = \underline{\mathcal{E}}(\liminf \underline{x}_n | \mathcal{B}) \text{ P}_{\mathcal{B}} \text{ - b.o.}$$

Stelling 3.5.8 (gemajoreerde convergentie): Als $\{\underline{x}_n\}$ een rij stochastische grootheden is en $\underline{y}$ een sommeerbare stochastische grootheid is, dan geldt

$$|\underline{x}_n| \leq \underline{y} \text{ en } \underline{x}_n \rightarrow \underline{x} \text{ P - b.o.} \implies \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_n | \mathcal{B}) \rightarrow \underline{\mathcal{E}}(\underline{x} | \mathcal{B}) \text{ P}_{\mathcal{B}} \text{ - b.o.}$$

Bewijs: Stelling 3.5.7, toegepast op de rijen $\{\underline{x}_n\}$ en $\{-\underline{x}_n\}$, geeft

$$\underline{\mathcal{E}}(\underline{x} | \mathcal{B}) \leq \liminf \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_n | \mathcal{B}) \leq \limsup \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_n | \mathcal{B}) \leq \underline{\mathcal{E}}(\underline{x} | \mathcal{B}) \text{ P}_{\mathcal{B}} \text{ - b.o.}$$

Stelling 3.5.9: a) $\underline{P}(\Omega | \mathcal{B}) = 1 \text{ P}_{\mathcal{B}} \text{ - b.o.}$

$$\underline{P}(0 | \mathcal{B}) = 0 \text{ P}_{\mathcal{B}} \text{ - b.o.}$$

b) $A \in \mathcal{A} \implies \underline{P}(A | \mathcal{B}) \geq 0 \text{ P}_{\mathcal{B}} \text{ - b.o.}$

c) $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, $A_n A_m = 0$ als $m \neq n \implies$
 $\underline{P}(\bigcup A_n | \mathcal{B}) = \sum \underline{P}(A_n | \mathcal{B}) \text{ P}_{\mathcal{B}} \text{ - b.o.}$

Bewijs: a) en b) zijn speciale gevallen van Stelling 3.5.5 a) en b), en c) volgt uit Stelling 3.5.5 d) en de monotone convergentie stelling.

Stelling 3.5.10: Als $\mathcal{B}$ en de σ -algebra die een integreerbare stochastische grootheid $\underline{x}$ in Ω induceert onderling onafhankelijk zijn, dan is $\underline{\mathcal{E}}(\underline{x} | \mathcal{B}) = \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}) \text{ P}_{\mathcal{B}} \text{ - b.o.}$

Bewijs: De stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{\chi}_B$ zijn voor alle $B \in \mathcal{B}$ onderling onafhankelijk, zodat

$$\int_B \underline{x}(\omega) \text{ P}(d\omega) = \underline{\mathcal{E}}(\underline{x} \underline{\chi}_B) = (\underline{\mathcal{E}} \underline{x})(\underline{\mathcal{E}} \underline{\chi}_B) = (\underline{\mathcal{E}} \underline{x}) \text{ P}(B) =$$

$$= \int_B (\underline{E} \underline{x}) P(d\omega).$$

Gevolg: Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onderling onafhankelijke stochastische grootheden zijn en $\underline{x}$ integreerbaar is, dan is $\underline{E}(\underline{x}|\underline{y}) = \underline{E}(\underline{x})$ b.o.

Stelling 3.5.11: Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ twee stochastische grootheden zijn, zodanig dat $\underline{x}$ $\mathcal{B}$ -meetbaar is en $(\underline{xy})$ en $\underline{y}$ integreerbaar zijn, dan geldt

$$\underline{E}(\underline{xy}|\mathcal{B}) = \underline{x} \underline{E}(\underline{y}|\mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Bewijs: De conclusie is juist als $\underline{y} \geq 0$ en $\underline{x} = \chi_B$ met $B \in \mathcal{B}$. Dan geldt immers, voor elke $B' \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} \int_{B'} \underline{x}(\omega) \underline{y}(\omega) P(d\omega) &= \int_{BB'} \underline{y}(\omega) P(d\omega) = \int_{BB'} \underline{E}_{\omega}(\underline{y}|\mathcal{B}) P(d\omega) = \\ &= \int_{B'} \underline{x}(\omega) \underline{E}_{\omega}(\underline{y}|\mathcal{B}) P(d\omega). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de conclusie ook juist is als $\underline{y} \geq 0$ is en $\underline{x}$ een niet-negatieve lineaire combinatie van indicatorfuncties van verzamelingen uit $\mathcal{B}$ is, en dit impliceert, op grond van de monotone convergentie stelling (Stelling 3.5.6), de geldigheid van de conclusie als $\underline{y} \geq 0$ is en $\underline{x} \geq 0$ en $\mathcal{B}$ -meetbaar is.

Nu volgt echter ook het algemene geval: Uit de integreerbaarheid van $\underline{xy}$ volgt dat de som

$$\underline{E} \underline{x}^+ \underline{y}^+ + \underline{E} \underline{x}^- \underline{y}^- - \underline{E} \underline{x}^+ \underline{y}^- - \underline{E} \underline{x}^- \underline{y}^+$$

gedefiniëerd is, zodat, op grond van het bovenstaande,

$$\underline{E}(\underline{xy}|\mathcal{B}) = \underline{x}^+ \underline{E}(\underline{y}^+|\mathcal{B}) + \underline{x}^- \underline{E}(\underline{y}^-|\mathcal{B}) - \underline{x}^+ \underline{E}(\underline{y}^-|\mathcal{B}) - \underline{x}^- \underline{E}(\underline{y}^+|\mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

De integreerbaarheid van $\underline{y}$ houdt in dat de termen in het rechterlid twee aan twee kunnen worden samengevoegd zodat

$$\underline{E}(\underline{xy}|\mathcal{B}) = \underline{x}^+ \underline{E}(\underline{y}|\mathcal{B}) - \underline{x}^- \underline{E}(\underline{y}|\mathcal{B}) = \underline{x} \underline{E}(\underline{y}|\mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Stelling 3.5.12: Als $\underline{x}$ een integreerbare stochastische grootheid is en $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ twee σ -algebra's zijn met $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$, dan is

$$\underline{E}(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}')|\mathcal{B}) = \underline{E}(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})|\mathcal{B}') = \underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}) \text{ b.o.}$$

Bewijs:

$$B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{B}' \Rightarrow \int_B \underline{E}_{\omega}(\underline{x}|\mathcal{B}') P(d\omega) = \int_B x(\omega) P(d\omega),$$

$$\text{zodat } \underline{E}(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}')|\mathcal{B}) = \underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}) \text{ } P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Verder is $\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})$ $\mathcal{B}$ -meetbaar en dus ook $\mathcal{B}'$ -meetbaar,

$$\text{zodat } \underline{E}(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})|\mathcal{B}') = \underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}) \text{ } P_{\mathcal{B}'} - \text{b.o.}$$

Stelling 3.5.13: a) Zij $\underline{x}$ een sommeerbare stochastische grootheid en g een continue convexe functie op een interval $I \subset (-\infty, +\infty)$ met $P\{\underline{x} \in I\} = 1$. Dan is $g(\underline{x})$ integreerbaar en $\underline{E}(g(\underline{x})|\mathcal{B}) \geq g(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}))$ $P_{\mathcal{B}}$ - b.o.

b) Deze conclusie blijft gelden als $\underline{x}$ slechts integreerbaar is met $\underline{E} \underline{x} = +\infty$, mits $g(+\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$.

Bewijs: a) Voor elke $y \in I$ is er een $\lambda(y)$ zodat

$$g(x) \geq g(y) + (x - y) \lambda(y)$$

voor alle $x \in I$, en $\lambda(y)$ is als functie van y monotoon niet-dalend en dus meetbaar. Omdat $\underline{x}$ sommeerbaar is en $\underline{x} \in I$ - b.o. geldt ook $\underline{E} \underline{x} \in I$ en $\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}) \in I$ $P_{\mathcal{B}}$ - b.o. Hieruit volgt allereerst dat

$$g(\underline{x}) \geq g(\underline{E} \underline{x}) + (\underline{x} - \underline{E} \underline{x}) \lambda(\underline{E} \underline{x}) \text{ } P - \text{b.o.}$$

zodat $g(\underline{x})$ sommeerbaar is met $\underline{E} g(\underline{x}) \geq g(\underline{E} \underline{x}) > -\infty$.

Ook volgt de ongelijkheid

$$g(\underline{x}) \geq g(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})) + (\underline{x} - \underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})) \lambda(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})) \text{ } P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Door in het voorgaande $\underline{x}$ te vervangen door de sommeerbare stochastische grootheid $\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})$, zien we dat $g(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}))$ integreerbaar is. Als nu $\lambda(\underline{x})$, en dus ook $\lambda(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}))$ met waarschijnlijkheid 1 begrensd is, dan is $(\underline{x} - \underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})) \lambda(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}))$ sommeerbaar, zodat, op grond van Stelling 3.5.5 b) en d) en Stelling 3.5.11,

$$\begin{aligned} \underline{E}(g(\underline{x})|\mathcal{B}) &\geq \underline{E}\{g(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})) + (\underline{x} - \underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})) \lambda(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}))|\mathcal{B}\} = \\ &= \underline{E}\{g(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}))|\mathcal{B}\} + \underline{E}\{(\underline{x} - \underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})) \lambda(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}))|\mathcal{B}\} = \end{aligned}$$

$$= g(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})) + \lambda(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})) \underline{E}(\underline{x} - \underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})|\mathcal{B}) =$$

$$= g(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Als $\lambda(\underline{x})$ niet begrensd is met waarschijnlijkheid 1, dan kan men twee rijen getallen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ kiezen zodat $a_{n+1} \leq a_n < b_n \leq b_{n+1}$ en $-\infty < \lambda(a_n) < \lambda(b_n) < +\infty$ voor alle n , terwijl

$$\lim a_n = \text{essinf } \underline{x}, \quad \lim b_n = \text{esssup } \underline{x}$$

met

$$\text{essinf } \lambda(\underline{x}) > -\infty \Rightarrow a_n = \text{essinf } \underline{x} \text{ voor alle } n$$

$$\text{esssup } \lambda(\underline{x}) < +\infty \Rightarrow b_n = \text{esssup } \underline{x} \text{ voor alle } n.$$

Zij nu, voor elke n ,

$$\underline{x}_n = \begin{cases} a_n & \text{als } \underline{x} < a_n \\ \underline{x} & \text{als } a_n \leq \underline{x} \leq b_n \\ b_n & \text{als } \underline{x} > b_n. \end{cases}$$

Dan is $\underline{x}_n$ sommeerbaar, $\underline{x}_n \in I$ P - b.o. en $\lambda(\underline{x}_n)$ is voor elke n met waarschijnlijkheid 1 begrensd, zodat $g(\underline{x}_n)$ integreerbaar is met $\underline{E}g(\underline{x}_n) > -\infty$ en

$$(3.5.4) \quad \underline{E}(g(\underline{x}_n)|\mathcal{B}) \geq g(\underline{E}(\underline{x}_n|\mathcal{B})) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Voorts geldt $|\underline{x}_n| \leq |\underline{x}| + \min(|a_1|, |b_1|)$ en $\lim \underline{x}_n = \underline{x}$ P - b.o., zodat (gemajoreerde convergentie)

$$\lim \underline{E}(\underline{x}_n|\mathcal{B}) = \underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

en dus, wegens de continuïteit van g ,

$$(3.5.5) \quad \lim g(\underline{E}(\underline{x}_n|\mathcal{B})) = g(\underline{E}(\underline{x}|\mathcal{B})) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Door te schrijven $g(\underline{x}_n) = g_n(\underline{x})$, waar

$$g_n(\underline{x}) = \begin{cases} a_n & \text{als } \underline{x} < a_n \\ \underline{x} & \text{als } a_n \leq \underline{x} \leq b_n \\ b_n & \text{als } \underline{x} > b_n, \end{cases}$$

ziet men gemakkelijk dat $g(\underline{x}_n)$ P - b.o. monotoon niet-dalend naar $g(\underline{x})$ convergeert, zodat

$$(3.5.6) \quad \lim \underline{E}(g(\underline{x}_n)|\mathcal{B}) = \underline{E}(g(\underline{x})|\mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

De te bewijzen ongelijkheid volgt nu uit (3.5.4), (3.5.5) en (3.5.6).

$$b) \text{ Als } \underline{x}_n = \begin{cases} \underline{x} & \text{als } \underline{x} < n \\ n & \text{als } \underline{x} \geq n, \end{cases}$$

dan geldt (3.5.4) op grond van a). Het is voorts gemakkelijk in te zien dat de monotone convergentie stelling van toepassing is, zowel op de rij $\{\underline{x}_n\}$ als op de rij $\{g(\underline{x}_n)\}$, zodat ook (3.5.5) en (3.5.6) gelden. Nu volgt de te bewijzen ongelijkheid als boven.

Uit het voorgaande volgt dat voorwaardelijke verwachtingen gegeven een σ -algebra $\mathcal{B}$ zich in vele opzichten gedragen als integralen. Zo geldt in het bijzonder

$$\underline{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \mid \mathcal{B}\right) = \sum_{i=1}^n a_i \underline{P}(A_i \mid \mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}}\text{-b.o.}$$

$$0 \leq \underline{x}_n \uparrow \underline{x} \Rightarrow 0 \leq \underline{E}(\underline{x}_n \mid \mathcal{B}) \leq \underline{E}(\underline{x} \mid \mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}}\text{-b.o.}$$

$$\underline{x} \text{ integreerbaar} \Rightarrow \underline{E}(\underline{x} \mid \mathcal{B}) = \underline{E}(\underline{x}^+ \mid \mathcal{B}) - \underline{E}(\underline{x}^- \mid \mathcal{B}) \\ P_{\mathcal{B}}\text{-b.o.}$$

Toch kunnen we zulke voorwaardelijke verwachtingen niet zonder meer als integralen ten opzichte van een voorwaardelijke waarschijnlijkheid schrijven. Daarvoor zal in ieder geval nodig zijn dat dergelijke integralen zinvol zijn, m.a.w. dat de voorwaardelijke waarschijnlijkheid zich als een waarschijnlijkheid gedraagt.

Definitie 3.5.6: We zeggen dat de voorwaardelijke waarschijnlijkheid gegeven een σ -algebra $\mathcal{B}$ regulier is, als er een reguliere versie bestaat, d.w.z. als er een functie $P_{\omega}(A \mid \mathcal{B})$ of $\Omega \times \mathcal{A}$ bestaat zodat $P_{\omega}(A \mid \mathcal{B})$ voor elke $A \in \mathcal{A}$ een $\mathcal{B}$ -meetbare functie op Ω is, $P_{\omega}(\cdot \mid \mathcal{B})$ voor elke $\omega \in \Omega$ een waarschijnlijkheid op $\mathcal{A}$ is, en

$$\int_B P_{\omega}(A \mid \mathcal{B}) P(d\omega) = P(AB)$$

voor alle $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Stelling 3.5.14: Als de voorwaardelijke waarschijnlijkheid gegeven een σ -algebra $\mathcal{B}$ regulier is met een reguliere versie $P_\omega(A|\mathcal{B})$, dan is

$$E_\omega(\underline{x}|\mathcal{B}) = \int \underline{x}(\omega') P(d\omega'|\mathcal{B}) P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

voor elke integreerbare stochastische grootheid $\underline{x}$.

Bewijs: Triviaal.

Voor elke versie van de voorwaardelijke waarschijnlijkheid gegeven een σ -algebra $\mathcal{B}$, elke $A \in \mathcal{A}$, en elke disjunct rij $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ gelden de relaties

$$P(\Omega|\mathcal{B}) = 1$$

$$P(A|\mathcal{B}) \geq 0$$

$$P(\bigcup A_n|\mathcal{B}) = \sum P(A_n|\mathcal{B})$$

op een verzameling met waarschijnlijkheid 1. Omdat deze verzameling in het algemeen niet alleen van de gekozen versie, maar ook van A en $\{A_n\}$ afhangt, impliceert dit niet dat er altijd een reguliere versie is. Om aan te tonen dat een dergelijke versie dan ook niet altijd bestaat, construeren we in het nu volgende een kansveld $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en een σ -algebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ met de eigenschap dat de voorwaardelijke waarschijnlijkheid gegeven $\mathcal{B}$ geen enkele reguliere versie bezit.

Zij $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{B}$ de σ -algebra van alle Borel verzamelingen in Ω , λ de Lebesgue maat op $\mathcal{B}$, en λ^* de bijbehorende uitwendige maat, d.w.z.

$$\lambda^*(S) = \inf \{ \lambda(B) \mid S \subset B \in \mathcal{B} \}$$

voor $S \subset \Omega$. Zij verder $C \subset \Omega$ een verzameling met $\lambda^*(C) = \lambda^*(\bar{C}) = 1$ (zie Halmos, section 16 voor de constructie van een dergelijke verzameling), en zij $\mathcal{A}$ de σ -algebra die door $\mathcal{B}$ en C wordt gegenereerd, d.w.z.

$$\mathcal{A} = \{ B_1 C \cup B_2 \bar{C} \mid B_1, B_2 \in \mathcal{B} \}.$$

Tenslotte definiëren we

$$P(A) = \frac{1}{2} \{ \lambda^*(AC) + \lambda^*(A\bar{C}) \}$$

voor $A \in \mathcal{A}$ en vervolgens bewijzen we dat P een waarschijn-

lijkheid op $\mathcal{A}$ is. Hierbij maken we herhaaldelijk gebruik van het feit dat $\lambda^*(BS) = \lambda(B)$ voor alle $B \in \mathcal{B}$ en alle $S \subset \Omega$ met $\lambda^*(S) = 1$. De juistheid van deze bewering is als volgt in te zien: $\lambda^*(BS) \leq \lambda(B)$ omdat $BS \subset B \in \mathcal{B}$, en $\lambda^*(BS) \geq \lambda(B)$ omdat voor elke $B' \in \mathcal{B}$ met $BS \subset B' \in \mathcal{B}$ geldt dat $B' \cup \bar{B} \supset S$, hetgeen impliceert dat $\lambda(B') + \lambda(\bar{B}) \geq \lambda^*(S) = 1$, zodat $\lambda(B') \geq \lambda(B)$.

Als nu $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ een disjuncte rij is, dan bestaan er twee rijen $\{B_{1,n}\}$ en $\{B_{2,n}\}$ in $\mathcal{B}$ zo, dat $A_n = B_{1,n}^C \cup B_{2,n}^{\bar{C}}$ voor alle n . Aangezien we $B_{i,n}$ zonodig door $\bigcap_{k \leq n} B_{i,n} \bar{B}_{i,k}$ kunnen vervangen ($i = 1, 2$), mogen we aannemen dat ieder van de rijen $\{B_{i,n}\}$ disjunct is, zodat

$$\begin{aligned} P(\cup A_n) &= P((\cup B_{1n})^C \cup (\cup B_{2n})^{\bar{C}}) = \frac{1}{2} \left\{ \lambda^*(\cup B_{1n}^C) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^*(\cup B_{2n}^{\bar{C}}) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \lambda(\cup B_{1n}) + \lambda(\cup B_{2n}) \right\} = \\ &= \sum \frac{1}{2} \left\{ \lambda(B_{1n}) + \lambda(B_{2n}) \right\} = \\ &= \sum \frac{1}{2} \left\{ \lambda^*(B_{1n}^C) + \lambda^*(B_{2n}^{\bar{C}}) \right\} = \sum P(A_n). \end{aligned}$$

Omdat we aan de definitie van P zien dat P niet-negatief is met $P(\Omega) = 1$, volgt hieruit dat P een waarschijnlijkheid op $\mathcal{A}$ is. We merken nog op dat λ de restrictie $P_{\mathcal{B}}$ van P op $\mathcal{B}$ is.

Stel nu dat de voorwaardelijke waarschijnlijkheid gegeven $\mathcal{B}$ een reguliere versie $P_{\omega}(A|\mathcal{B})$ heeft. Dan is

$$\int_B P_{\omega}(C|\mathcal{B}) P(d\omega) = \int_B P_{\omega}(C|\mathcal{B}) \lambda(d\omega) = P(CB) = \frac{1}{2} \lambda(B)$$

voor alle $B \in \mathcal{B}$, zodat er een verzameling $E \subset \mathcal{B}$ is met $\lambda(E) = 1$, en met de eigenschap dat $P_{\omega}(C|\mathcal{B}) = \frac{1}{2}$ voor alle $\omega \in E$. Bovendien geldt voor elk rationaal getal $r \in \Omega$ dat

$$\begin{aligned} \int_B P_{\omega}([0, r]|\mathcal{B}) P(d\omega) &= \int_B P_{\omega}([0, r]|\mathcal{B}) \lambda(d\omega) = P(B \cap [0, r]) = \\ &= \lambda(B \cap [0, r]) \end{aligned}$$

voor alle $B \in \mathcal{B}$, zodat er een verzameling $F_r \in \mathcal{B}$ is met

$\lambda(F_r) = 1$ en de eigenschap dat $P_\omega([0,r]|\mathcal{B}) = \chi_{[0,r]}(\omega)$ voor alle $\omega \in F_r$. Omdat een maat op $\mathcal{B}$ bepaald is door zijn restrictie op de intervallen van de vorm $[0,r]$ met $r \in \Omega$ rationaal, volgt nu dat

$$P_\omega(B|\mathcal{B}) = \chi_B(\omega)$$

voor alle $B \in \mathcal{B}$ als $\omega \in F = \bigcap \{ F_r \mid r \in \Omega \text{ rationaal} \}$. De verzameling EF is niet leeg, omdat $\lambda(EF) = 1$, en voor elke $\omega \in EF$ geldt nu

$$P_\omega(\{\omega\} | \mathcal{B}) = 1$$

en

$$P_\omega(C|\mathcal{B}) = \frac{1}{2},$$

hetgeen in strijd is met onze veronderstelling dat $P_\omega(\cdot|\mathcal{B})$ een waarschijnlijkheid is. Derhalve hebben we aangetoond dat de voorwaardelijke waarschijnlijkheid gegeven $\mathcal{B}$ bij deze keuze van $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en $\mathcal{B}$ geen enkele reguliere versie bezit.

We keren nu weer terug tot het algemene geval van een niet nader gespecificeerd kansveld $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en een σ -algebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. We hebben gezien (Stelling 3.5.14), dat de voorwaardelijke verwachting van een integreerbare stochastische grootheid gegeven $\mathcal{B}$ als een integraal geschreven kan worden, mits de voorwaardelijke waarschijnlijkheid gegeven $\mathcal{B}$ regulier is, en het hierboven gegeven voorbeeld toont aan dat deze regulariteits-eis een wezenlijke beperking is. In het nu volgende zal echter blijken dat deze eis in zekere zin geheel overbodig is!

Zij $\underline{x} = (\underline{x}_t, t \in T)$ een collectie stochastische grootheden, zodat we $\underline{x}$ kunnen opvatten als een meetbare functie op $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ met waarden in de meetbare ruimte $(X, \mathcal{J})$, waar $X = \prod_{t \in T} R_t$ met $R_t = (-\infty, +\infty)$ voor alle $t \in T$, en waar $\mathcal{J}$ de σ -algebra van alle Borelverzamelingen in X is. Zij verder

$$\mathcal{K}_{\underline{x}} = \{ \{ \underline{x} \in S \} \mid S \in \mathcal{J} \},$$

en

$$W = \{ x(\omega) \mid \omega \in \Omega \},$$

d.w.z. zij $\mathcal{K}_{\underline{x}}$ de σ -algebra die $\underline{x}$ in Ω induceert en zij W de waardenverzameling van $\underline{x}$.

Definitie 3.5.7: De verdeling van $\underline{x}$ is de restrictie $P_{\mathcal{K}_{\underline{x}}}$ van P op $\mathcal{K}_{\underline{x}}$.

Definitie 3.5.8: Een functie $P_{\omega}(A|\mathcal{B})$, gedefiniëerd voor alle $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{K}_{\underline{x}}$, is een voorwaardelijke verdeling van $\underline{x}$ gegeven $\mathcal{B}$ als $P_{\omega}(A|\mathcal{B})$ voor elke $A \in \mathcal{K}_{\underline{x}}$ een $\mathcal{B}$ -meetbare functie van ω is en voor elke $\omega \in \Omega$ een waarschijnlijkheid op $\mathcal{K}_{\underline{x}}$ is, terwijl

$$\int_B P_{\omega}(A|\mathcal{B}) P(d\omega) = P(AB)$$

voor alle $A \in \mathcal{K}_{\underline{x}}$, $B \in \mathcal{B}$.

Definitie 3.5.9: Een functie $Q_{\omega}(S|\mathcal{B})$, gedefiniëerd voor alle $\omega \in \Omega$, $S \in \mathcal{F}$, is een gemengde voorwaardelijke verdeling van $\underline{x}$ gegeven $\mathcal{B}$ als $Q_{\omega}(S|\mathcal{B})$ voor elke $S \in \mathcal{F}$ een $\mathcal{B}$ -meetbare functie van ω is en voor elke $\omega \in \Omega$ een waarschijnlijkheid op $\mathcal{F}$ is, terwijl

$$\int_B Q_{\omega}(S|\mathcal{B}) P(d\omega) = P(B \cap \{ \underline{x} \in S \})$$

voor alle $S \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{B}$.

Stelling 3.5.15: a) Als de voorwaardelijke waarschijnlijkheid gegeven $\mathcal{B}$ regulier is, dan heeft $\underline{x}$ een voorwaardelijke verdeling gegeven $\mathcal{B}$.

b) Als $\underline{x}$ een voorwaardelijke verdeling gegeven $\mathcal{B}$ heeft, dan heeft $\underline{x}$ ook een gemengde voorwaardelijke verdeling gegeven $\mathcal{B}$. Het omgekeerde van deze bewering geldt als $W \in \mathcal{F}$.

Bewijs: a) Als $P_{\omega}(A|\mathcal{B})$, $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{A}$, een reguliere versie van de voorwaardelijke waarschijnlijkheid gegeven $\mathcal{B}$ is,

dan is de restrictie van deze functie op $\Omega \times \mathcal{K}_{\underline{x}}$ een voorwaardelijke verdeling van $\underline{x}$ gegeven $\mathcal{B}$.

b) Als $P_{\omega}(A|\mathcal{B}), \omega \in \Omega, A \in \mathcal{K}_{\underline{x}}$ een voorwaardelijke verdeling van $\underline{x}$ gegeven $\mathcal{B}$ is, dan is de functie $Q_{\omega}(S|\mathcal{B})$, gedefiniëerd voor $\omega \in \Omega, S \in \mathcal{F}$ door

$$Q_{\omega}(S|\mathcal{B}) = P_{\omega}(\underline{x} \in S | \mathcal{B})$$

een gemengde voorwaardelijke verdeling van $\underline{x}$ gegeven $\mathcal{B}$.

Zij nu omgekeerd $Q_{\omega}(S|\mathcal{B}), \omega \in \Omega, S \in \mathcal{F}$ een gemengde voorwaardelijke verdeling van $\underline{x}$ gegeven $\mathcal{B}$. Het ligt dan voor de hand om een voorwaardelijke verdeling van $\underline{x}$ gegeven $\mathcal{B}$ te construeren door $P_{\omega}(\underline{x} \in S | \mathcal{B}) = Q_{\omega}(S|\mathcal{B})$ te stellen. Dit is echter niet altijd mogelijk, omdat het kan voorkomen dat er verschillende verzamelingen $S_1, S_2 \in \mathcal{F}$ zijn met $Q_{\omega}(S_1|\mathcal{B}) \neq Q_{\omega}(S_2|\mathcal{B})$ voor sommige ω , terwijl $\{\underline{x} \in S_1\} = \{\underline{x} \in S_2\}$. Als echter $W \in \mathcal{F}$, dan is

$$\int_B Q_{\omega}(\bar{W}|\mathcal{B}) P(d\omega) = P(B \cap \{\underline{x} \in \bar{W}\}) = P(\emptyset) = 0$$

voor alle $B \in \mathcal{B}$, zodat er een verzameling $N \in \mathcal{B}$ is met $P(N) = 0$ met de eigenschap dat $Q_{\omega}(\bar{W}|\mathcal{B}) = 0$ voor alle $\omega \in N$. Omdat de gelijkheid $\{\underline{x} \in S_1\} = \{\underline{x} \in S_2\}$ impliceert dat $S_1 \Delta S_2 \subset \bar{W}$, volgt hieruit dat we $P_{\omega}(A|\mathcal{B})$ ondubbelzinnig kunnen definiëren voor $\omega \in N$ en $A \in \mathcal{K}_{\underline{x}}$ door

$$P_{\omega}(\underline{x} \in S | \mathcal{B}) = Q_{\omega}(S|\mathcal{B}), \quad S \in \mathcal{F}$$

te stellen. Voor $\omega \in N$, $A \in \mathcal{K}_{\underline{x}}$ definiëren we bijvoorbeeld

$$P_{\omega}(A|\mathcal{B}) = P_{\omega_0}(A|\mathcal{B}),$$

waar ω_0 een vast punt in N is. Tenslotte is gemakkelijk in te zien dat de aldus gedefiniëerde functie $P_{\omega}(A|\mathcal{B})$ inderdaad een voorwaardelijke verdeling van $\underline{x}$ gegeven $\mathcal{B}$ is.

Stelling 3.5.16: Als $\underline{x} = (\underline{x}_n, n = 1, 2, \dots)$ een aftelbare collectie stochastische grootheden is, dan heeft $\underline{x}$ een gemengde voorwaardelijke verdeling gegeven $\mathcal{B}$.

Bewijs: Zij $P_{\omega}(A|\mathcal{B}), \omega \in \Omega, A \in \mathcal{A}$, een versie van de

voorwaardelijke waarschijnlijkheid gegeven $\mathcal{B}$, en zij

$$F_{n,\omega}(x_1, \dots, x_n) = P_{\omega}(\underline{x}_1 \leq x_1, 1 \leq i \leq n \mid \mathcal{B})$$

voor $\omega \in \Omega$, $n = 1, 2, \dots$ en $x_1, \dots, x_n$ reëel. Er is dan een verzameling $N_1 \in \mathcal{B}$ met $P(N_1) = 0$ met de eigenschap dat, voor elke $\omega \in \bar{N}_1$, alle $n = 1, 2, \dots$ en alle rationale r_1, r'_1 met $r_1 \leq r'_1$ ($1 \leq i \leq n$),

$$F_{n,\omega}(r_1, \dots, r_n) \leq F_{n,\omega}(r'_1, \dots, r'_n)$$

en

$$0 \leq \Delta_{r_1, \dots, r_n}^{r'_1, \dots, r'_n} F_{n,\omega} \leq 1.$$

Verder is er een verzameling $N_2 \in \mathcal{B}$ met $P(N_2) = 0$ met de eigenschap dat, voor elke $\omega \in \bar{N}_2$, alle $n = 1, 2, \dots$ en alle rationale $r_1, \dots, r_n$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n,\omega}(r_1 + \frac{1}{k}, \dots, r_n + \frac{1}{k}) = F_{n,\omega}(r_1, \dots, r_n),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n,\omega}(k, \dots, k) = 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n,\omega}(r_1, \dots, r_{n-1}, -k) = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n+1,\omega}(r_1, \dots, r_n, k) = F_{n,\omega}(r_1, \dots, r_n).$$

Men controleert nu gemakkelijk dat, voor elke $\omega \in \bar{N}_1 \cap \bar{N}_2$ en alle $n = 1, 2, \dots$, de functie $F_{n,\omega}(r_1, \dots, r_n)$ op de rationale punten in de n -dimensionale ruimte rechts-continu is, naar 0 convergeert als één der r_i naar $-\infty$ convergeert, naar 1 convergeert als alle r_i naar $+\infty$ convergeren, terwijl $F_{n+1,\omega}(r_1, \dots, r_n, r_{n+1})$ naar $F_{n,\omega}(r_1, \dots, r_n)$ convergeert als r_{n+1} naar $+\infty$ convergeert. We definiëren nu

$$F_{n,\omega}^*(r_1, \dots, r_n) = \begin{cases} F_{n,\omega}(r_1, \dots, r_n) & \text{als } \omega \in \bar{N}_1 \cap \bar{N}_2, \\ F_{n,\omega_0}(r_1, \dots, r_n) & \text{als } \omega \in N_1 \cup N_2, \end{cases}$$

voor $n = 1, 2, \dots$, en $r_1, \dots, r_n$ rationaal, waar ω_0 een vast punt in $\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2$ is. Door vervolgens met behulp van de continuïteit van rechts de definitie van iedere functie $F_{n,\omega}^*$ uit te breiden tot de gehele n -dimensionale ruimte, verkrijgen we, voor iedere $\omega \in \Omega$, een consistent stelsel van verdelingsfuncties $\{F_{n,\omega}^*, n = 1, 2, \dots\}$, dat op grond van de consistentiestelling van Kolmogorov (Stelling 2.5.3) een waarschijnlijkheid Q_ω op $\mathcal{F}$ bepaalt.

We laten nu zien dat de aldus gedefiniëerde functie $Q_\omega(S)$ met $\omega \in \Omega$, $S \in \mathcal{F}$ een gemengde voorwaardelijke verdeling van $\underline{x}$ gegeven β is. Daartoe moeten we aantonen dat voor elke $S \in \mathcal{F}$ de functie $Q_\omega(S)$ van ω $\mathcal{B}$ -meetbaar is en $P_{\mathcal{B}}$ -b.o. gelijk is aan $P_\omega(\underline{x} \in S | \mathcal{B})$. Op grond van de constructie van $Q_\omega(S)$ is het duidelijk dat dit het geval is voor alle verzamelingen S van de vorm

$$\{(x_1, x_2, \dots) \mid r_1 < x_i \leq r'_1, 1 \leq i \leq n\}$$

met n eindig en r_i, r'_i rationaal met $r_i \leq r'_i$ ($1 \leq i \leq n$), en dus ook voor alle verzamelingen S die behoren tot de algebra die bestaat uit alle eindige verenigingen van zulke verzamelingen. Omdat men eveneens gemakkelijk inziet dat de klasse van alle verzamelingen $S \in \mathcal{F}$, waarvoor $Q_\omega(S)$ de gewenste eigenschappen bezit, gesloten is onder monotone limiet overgangen, volgt nu (zie Loève 1.6.A of Halmos 6.B) dat deze klasse gelijk is aan $\mathcal{F}$, waarmee het bewijs volledig is.

De voorgaande stelling is in het bijzonder van toepassing als $\underline{x}$ een stochastische grootheid of een stochastische vector is. Men kan dit inzien door het boven gegeven bewijs op een voor de hand liggende manier te wijzigen, of door op te merken dat een eindige collectie stochastische grootheden altijd als een deel van een aftelbare collectie beschouwd kan worden.

Speciale vermelding verdient het geval dat Ω zelf een aftelbaar of eindig product van de reële rechte met zichzelf is en $\mathcal{A}$ de bijbehorende σ -algebra van Borel verzamelingen. Er is dan een aftelbare of eindige collectie

stochastische grootheden $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots)$ gedefiniëerd door $x_n(\omega) = x_n$ als $\omega = (x_1, x_2, \dots)$, d.w.z. $x(\omega) = \omega$. De stelling zegt nu dat $\underline{x}$ een gemengde voorwaardelijke verdeling gegeven $\mathcal{B}$ heeft, en deze is hier tevens een voorwaardelijke verdeling van $\underline{x}$ gegeven $\mathcal{B}$ omdat $\Omega = \mathcal{X}$ en $\mathcal{K}_{\underline{x}} = \mathcal{I}$, en zelfs een reguliere versie van de voorwaardelijke waarschijnlijkheid gegeven $\mathcal{B}$ omdat $\mathcal{A} = \mathcal{K}_{\underline{x}}$.

Stelling 3.5.17: Zij $\underline{x}$ een collectie stochastische grootheden en zij g een reële Borel functie op $\mathcal{X}$ met de eigenschap dat $g(\underline{x})$ integreerbaar is.

Als $\underline{x}$ een voorwaardelijke verdeling $P_\omega(A|\mathcal{B})$ gegeven $\mathcal{B}$ heeft, dan is

$$E_\omega(g(\underline{x})|\mathcal{B}) = \int_{\Omega} g(x(\omega')) P_\omega(d\omega'|\mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Als $\underline{x}$ een gemengde voorwaardelijke verdeling $Q_\omega(S|\mathcal{B})$ gegeven $\mathcal{B}$ heeft, dan is

$$E_\omega(g(\underline{x})|\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{X}} g(x) Q_\omega(dx|\mathcal{B}) \quad P_{\mathcal{B}} - \text{b.o.}$$

Bewijs: De geldigheid van beide beweringen volgt op de gebruikelijke wijze uit het feit dat ze juist zijn als g de indicatorfunctie van een Borel verzameling in $\mathcal{X}$ is.

Op grond van Stelling 3.5.16 en Stelling 3.5.17 kunnen we nu besluiten dat elke voorwaardelijke verwachting gegeven $\mathcal{B}$ te schrijven is als een integraal ten opzichte van een gemengde voorwaardelijke verdeling gegeven $\mathcal{B}$, en veelal zelfs ten opzichte van een voorwaardelijke verdeling gegeven $\mathcal{B}$ (zie Stelling 3.5.15).

COLLOQUIUM WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING

Beknopte samenvatting

HOOFDSTUK 1: MAATTHEORIE

- 1.1. We hebben steeds een ruimte Ω met punten ω , deelvzn $\Gamma, \Lambda, \dots$ en klassen $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$ van deelvzn.
- 1.2. (Def. 1.2.1). Algebra = niet lege klasse $\mathcal{G}$ die complementen, eindige verenigingen en doorsneden, lege vz O bevat;
 σ -algebra ook aftelbare verenigingen en doorsneden.
 (Def. 1.2.2). $\mathcal{G}$ heet atomair als elk element een (eventueel overaftelbare) vereniging van atomen is; $\Gamma \in \mathcal{G}$ is een atoom als $\Gamma \neq O$ en voor elke $\Lambda \in \mathcal{G}$ geldt $\Gamma \cap \Lambda = O$ of $\Gamma \cap \Lambda = \Gamma$.
 (St. 1.2.1). Bij een willekeurige klasse $\mathcal{H}$ is

$${}^{\mathcal{K}}\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \Gamma_{m,n} \mid \Gamma_{m,n} \in \mathcal{H} \text{ of } \overline{\Gamma_{m,n}} \in \mathcal{H} \right\}$$

de kleinste algebra die $\mathcal{H}$ omvat, en de doorsnede van alle $\mathcal{H}$ omvattende algebra's. ${}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}$ = de Borel-uitbreiding van $\mathcal{H}$ = de kleinste σ -algebra die $\mathcal{H}$ omvat; ${}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}$ niet constructief aan te geven tenzij met oneindig veel symbolen $\cap$ en $\cup$.

Voorbeeld: $\Omega = \mathbb{R}^n$; $\mathcal{H}$ bestaat uit alle halfopen n-dim. intervallen

$$(a, b] = \{x \mid a_i < x_i \leq b_i \ (i=1, \dots, n)\}, \quad a_i \text{ en } b_i \in \bar{\mathbb{R}}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

($\bar{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{vz } \mathbb{R} \text{ der reële getallen waaraan toegevoegd } \infty \text{ en } -\infty$);

de algebra $\mathcal{G} = {}^{\mathcal{K}}\mathcal{H}$ bestaat uit alle eindige verenigingen van elementen van $\mathcal{H}$; ${}^{\mathcal{B}}\mathcal{G} = {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}$ bestaat uit de Borelvzn van $\mathbb{R}^n$, en bevat minstens: alle intervallen (open, halfopen, gesloten), alle open en gesloten vzt; $\{x \mid f(x) < a\}$ als $f(x)$ continu is.

Opm. Alle eigenschappen van productruimten, productalgebra's en productmaten staan in dit overzicht bij par. 2.5.

- 1.3. Ω X (vaak: $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{array}{ccc} \omega & \xrightarrow{f} & x \\ \varphi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \mid f(\omega) \in A\} & \leftarrow \mathcal{P} & A \subset X \end{array}$$

B.v. $\omega = \text{uitkomst van een experiment}$ $\xrightarrow{f}$ $\left(\begin{array}{l} \text{meting of waarneming} \\ f(\omega) \end{array} \right)$

$$\varphi(A) = \text{vzt van uitkomsten} \leftarrow \mathcal{P} \quad A = \text{interval}$$

De hier gedefinieerde φ is σ -homomorf, d.w.z. operatiegetrouw voor complement, aftelbare doorsnede en aftelbare vereniging: immers $\varphi(\bigcup_1^\infty A_n) = \bigcup_1^\infty \varphi(A_n)$ etc. Bij het begrip operatiegetrouw worden hoogstens aftelbare operaties beschouwd, hoewel onze φ ook overaftelbare verenigingen etc. in hun beeld overvoert.

(Def.1.3.3). Inhoud m = niet-negatieve additieve vz-functie gedefinieerd op een algebra $\mathcal{G}$. Als voor elk disjunct stel $\Lambda_n \in \mathcal{G}$, waarvoor (toevallig) $\bigcup_{n=1}^\infty \Lambda_n \in \mathcal{G}$, geldt $m(\bigcup_{n=1}^\infty \Lambda_n) = \sum_{n=1}^\infty m(\Lambda_n)$, heet m σ -additieve inhoud.

(Def. 1.3.4). Maat μ = σ -additieve inhoud gedefinieerd op een σ -algebra $\mathcal{K}$.

(St.1.3.3). Een aftelbare som van inhouden (maten) met hetzelfde definitiegebied is een inhoud (maat).

(Def.1.3.5, 1.3.6). De maat μ op $\mathcal{K}$ heet σ -finit (resp. de inhoud m op $\mathcal{G}$ heet normaal) als $\Omega = \bigcup_{\rho=1}^\infty \Omega_\rho$ een disjuncte splitsing is met $\Omega_\rho \in \mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{G}$) en voor alle ρ $\mu(\Omega_\rho) < \infty$ (resp: $m(\Omega_\rho) < \infty$ en voor elke $\Lambda \in \mathcal{G}$ $m(\Lambda) = \sum_{\rho=1}^\infty m(\Lambda \cap \Omega_\rho)$).

(pag. 15). De maat μ op $\mathcal{K}$ heet volledig, als uit $\Lambda^* \subset \Lambda_0$, $\Lambda_0 \in \mathcal{K}$, $\mu(\Lambda_0) = 0$, volgt $\Lambda^* \in \mathcal{K}$.

Bij gegeven (onvolledige) maat μ op $\mathcal{K}$ is $\mathcal{K}' = \{\Lambda \in \mathcal{K} \mid \exists \Delta \in \mathcal{K}, \Lambda^* \subset \Delta, \mu(\Delta) = 0\}$

$$\mathcal{K}' \stackrel{\text{def}}{=} \{\Lambda \mid \Lambda = \Delta \cup \Lambda^*, \Delta \in \mathcal{K}, \Lambda^* \subset \Lambda_0 \in \mathcal{K}, \mu(\Lambda_0) = 0\}$$

een σ -algebra waarop $\mu'(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\Delta)$ een volledige maat is.

1.4. Is een inhoud m op een algebra $\mathcal{G}$ steeds uit te breiden tot een maat μ op $\mathcal{G}$? Ja, als we eisen, dat m σ -additief en normaal is.

Geval 1: $m(\Omega)$ eindig, dus na deling $m(\Omega)=1$ [$m(\Omega)=0$ is triviaal]. Via de vzn $\Psi = \bigcup_{v=1}^\infty \Gamma_v$ ($\Gamma_v \in \mathcal{G}$) definiëren we de uitwendige maat μ^* (zie Def.1.4.2). Λ heet Γ -approximeerbaar als:

$$\forall n \exists \Gamma_n \in \mathcal{G} \quad \mu^*(\Lambda \Delta \Gamma_n) < n^{-1}.$$

Dan blijkt $\mu(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(\Gamma_n)$ een maat te definiëren op de σ -algebra $\mathcal{K}$ van alle Γ -approximeerbare = meetbare verzamelingen.

Verder is $\mathcal{K} = \{\Delta \cup \Lambda^* \mid \Delta \in \mathcal{G}, \Lambda^* \subset \Lambda_0 \in \mathcal{G}, \mu(\Lambda_0) = 0\}$, waarbij zelfs de keuze $\Delta = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{v=1}^\infty \Gamma_{n,v}$ ($\Gamma_{n,v} \in \mathcal{G}$) mogelijk is.

μ is volledig op $\mathcal{K}$ en bij gegeven m uniek op $\mathcal{K}$.

Geval 2: $m(\Omega) = \infty$: via normaliteit splitsen en eerst $\Omega_\rho, \mathcal{G}_\rho, m_\rho$ beschouwen. Dit geeft een klasse $\mathcal{K}_\rho$ van Γ_ρ -approximeerbare vzn; de meetbare vzn zijn nu die Λ waarbij voor elke ρ geldt

$\Lambda \cap \Omega_\rho \in \mathcal{K}_\rho$, met maat $\mu = \sum \mu_\rho$ die weer volledig en uniek is.

Alternatieve definitie van Carathéodory: Λ meetbaar betekent: voor elke $\Phi \subset \Omega$ is $\mu^*(\Phi) = \mu^*(\Phi \cap \Lambda) + \mu^*(\Phi \cap \bar{\Lambda})$. Dit geeft hetzelfde resultaat voor normale inhouden, maar geldt ook bij niet-normale.

Voorbeeld: De geometrische inhoud $m((a, b]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ geeft bij uitbreiding de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^n$.

- 1.5. Intervalmaat op $\mathbb{R}^n$ = maat waarvan de definitieklasse de Borelvzn omvat en waarbij elk eindig interval een eindige maat heeft. Via een splitsing van $\mathbb{R}^n$ in eenheidskuben blijkt elke intervalmaat σ -finit te zijn.
- $F(x)$ gedefinieerd op $\mathbb{R}^n$ heet verdelingsfunctie als er een intervalmaat μ is met $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ en voor alle x $F(x) = \mu((-\infty, x])$. Als μ per interval door F bepaald is, is de toevoeging van F aan μ een-eenduidig: bewijs met de k^e differenties

$$\Delta_{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}}^{b_{i_1}, \dots, b_{i_k}} F(x) \quad (\text{Def. 1.5.5}).$$

Elke verdelingsfunctie is monotoon niet dalend; voer in $F(\infty) = 1$ en $F(x) = 0$ als $\exists_i (x_i = -\infty)$, dan is $F(x)$ continu van rechts voor $-\infty \leq x < \infty$ en continu van links voor $x = \infty$; $F(x_1, \dots, x_i, \infty, \dots, \infty)$ is een verdelingsfunctie in $\mathbb{R}^1$.

(St. 1.5.2). De discontinuïteitspunten van $F(x)$ liggen in hoogstens aftelbaar veel hypervlakken $x_i = a_i^k$ ($i=1, \dots, n; k=1, 2, \dots$). In $\mathbb{R}^1$ is $F(x) = F_c(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu(x - x_n)$ met $F_c(x)$ continu en sprongen p_n voor $x = x_n$.

(Def. 1.5.7). $G(x)$ is een maatdefiniërende functie als $G(x)$ continu van rechts is, eindig voor eindige x , en bij G een intervalmaat μ bestaat zodat voor eindige a en b geldt $\mu((a, b]) = \Delta_a^b G(x)$. De eis voor μ mag vervangen worden door: voor eindige a en b is $\Delta_a^b G(x) \geq 0$.

(St. 1.5.4). Als voor een maatdefiniërende functie $G(x)$ op $\mathbb{R}^n$, waarbij voor alle x $0 \leq G(x) \leq 1$ is en $G(\infty) = 1$, alle k^e differenties voor $k \leq n$ niet-negatief zijn, dan is G een verdelingsfunctie.

(Pag. 53). Een maatdefiniërende functie $G(x)$ op $\mathbb{R}^n$ is een verdelingsfunctie, als geldt:

$$\bigvee_i \bigvee_{x_1} \dots \bigvee_{x_{i-1}} \bigvee_{x_{i+1}} \dots \bigvee_{x_n} \lim_{x_i \rightarrow -\infty} G(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\text{en } \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{x_n \rightarrow \infty} G(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

HOOFDSTUK 1^a : BOOLE-ALGEBRA's

Dit gedeelte staat los van de verdere stof en wordt hier niet samengevat.

HOOFDSTUK 2 : INTEGRATIETHEORIE

2.1(a) Gegeven: maatruimte $(\Omega, \mathcal{K}, \mu) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
 (Def.2.1.1). $f(\omega)$ heet $\mathcal{K}$ -meetbaar als $\forall a \in \mathbb{R} \{ \omega | f(\omega) \leq a \} \in \mathcal{K}$.¹⁾
 Speciaal geval: $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{K} = \mathcal{B} = \text{Borelvzn}$; de $\mathcal{B}$ -meetbare functies heten Bairefuncties.

2.1(b) Geg. $(\Omega, \mathcal{K}, \mu) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ of $\mathbb{R}^n$ met $\mathcal{K}$ -meetbare functie f ; ruimte Ω' met σ -algebra $\mathcal{K}'$ en een σ -homomorfe afbeelding φ van $\mathcal{K}'$ op $\mathcal{K}$. Dan is het steeds mogelijk μ en f te verplanten tot μ' en f' , d.w.z. een maat μ' op $\mathcal{K}'$ en een functie $f' : (\Omega' \rightarrow \mathbb{R} \text{ of } \mathbb{R}^n)$ te construeren met: voor elke $\Lambda' \in \mathcal{K}'$

$$\mu'(\Lambda') = \mu(\varphi \Lambda') \quad ; \quad \text{voor elke } a \in \mathbb{R} \text{ (of } \mathbb{R}^n)$$

$$\{ \omega' | f'(\omega') \leq a \} \in \mathcal{K}' \text{ en } \varphi(\{ \omega' | f'(\omega') \leq a \}) = \{ \omega | f(\omega) \leq a \}.$$

Wanneer f'' ook voldoet, is $f'(\omega) = f''(\omega)$ μ' -b.o.

Speciaal geval: $\Omega' = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{K}' = \mathcal{B}$ (Borelvzn). Als we nu $\Omega, \mathcal{K}, \mu$ en een $\mathcal{K}$ -meetbare f hebben, behoeven we φ niet te geven, want $\varphi(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \omega | f(\omega) \in B \}$ voor elke $B \in \mathcal{B}$ is een σ -homomorfie..

Als $\mathcal{K}_f \stackrel{\text{def}}{=} \text{kleinste } \sigma\text{-algebra die alle } \{ \omega | f(\omega) \leq a \}$ ($a \in \mathbb{R} \text{ of } \mathbb{R}^n$) bevat, dan is $\mathcal{K}_f = \varphi(\mathcal{B})$ dus we moeten nu bij het verplanten werken met $\mathcal{K}_f$ i.p.v. $\mathcal{K}$. De keuze $f'(y) = y$ is geoorloofd, want $\varphi(\{ y | f'(y) \leq a \}) = \varphi((-\infty, a]) = \{ \omega | f(\omega) \leq a \}$ volgens de def. van φ .

Als $\mu(\Omega) = 1$ is, heet $F_f(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mu'((-\infty, a]) = \mu\{ \omega | f(\omega) \leq a \}$ de verdelingsfunctie van f , c.q. de simultane verdelingsfunctie van $f_1, \dots, f_n$.

1) Equivalente eis: voor elke Borelvz B is $\{ \omega | f(\omega) \in B \} \in \mathcal{K}$.

2.1.(c) Als $f_1(\omega), \dots, f_n(\omega)$ allen $\mathcal{K}$ -meetbaar zijn, en $\Phi(y_1, \dots, y_n)$ is een Bairefunctie, dan is $g(\omega) = \Phi(f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$ ook $\mathcal{K}$ -meetbaar. Hieruit volgt dat met f en g ook $f \pm g$, fg , $|f|$, f^+ en f^- behoren tot de klasse M der meetbare functies.

Als $f_n (n=1, 2, \dots)$ meetbaar zijn en $f(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ μ -b.o. dan $f \in M^*$, d.w.z. er is een $g \in M$ zodat $f(\omega) = g(\omega)$ μ -b.o.

2.2. In deze gehele paragraaf is $(\Omega, \mathcal{K}, \mu)$ een σ -finiete maatruimte. Via de ordinatenverzamelingen (Def.2.2.3, pag.106) definiëren we voor meetbare functies f $\int f^+ d\mu$ en $\int f^- d\mu$; is één van beide eindig dan heet f integreerbaar (klasse I) en zijn beide eindig dan heet f sommeerbaar (klasse S). De klassen I^* resp. S^* bevatten de functies die μ -b.o. gelijk zijn aan een functie uit I resp. S.

(Def.2.2.5) Trapfunctie $t(\omega) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \chi_{\Lambda_k}(\omega)$, $\alpha_k \in \overline{\mathbb{R}}$, Λ_k disjunct.

(St.2.2.8*). $f \in S^* \iff \exists$ rij sommeerbare trapfuncties t_n , $t_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ μ -b.o. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int t_n d\mu$ bestaat en is eindig. We kunnen de rij t_n zo kiezen dat $f(\omega)$ voor $f(\omega) \geq 0$ van beneden en voor $f(\omega) \leq 0$ van boven wordt benaderd.

Nu heeft ook elke rij sommeerbare trapfuncties t_n , waarvoor geldt $t_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ μ -b.o. en $\lim_{n \rightarrow \infty} \int t_n d\mu$ bestaat en is eindig, de eigenschap $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int t_n d\mu$.

De eenvoudigste integraal-eigenschappen worden hier niet genoemd.

Tschebycheff: $f \in S^*$, $f \geq 0$, dan $\forall c > 0 \quad \mu(\{\omega \mid f(\omega) \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int f d\mu$.

Gemaïjoreerde convergentie: $g \in S^*$, $\forall_n f_n \in M^*$ en $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ μ -b.o., $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ bestaat μ -b.o., dan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in S^*$ en $\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$.

Lebesgue: $\forall_n f_n \in I^*$, $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ μ -b.o., $-\infty < \int f_n d\mu \leq C < \infty$, dan bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ μ -b.o., $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in S^*$ en $\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$.

Continuïteit: $\forall_{t \in [\alpha, \beta]} f_t(\omega) \in M$ en $|f_t(\omega)| \leq h(\omega)$, $h \in S^*$, en voor μ -bijna alle ω is $f_t(\omega)$ continu naar t in $t=t_0$, dan is $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int f_t(\omega) d\mu$ continu in $t=t_0$.

Differentieerbaarheid: $\exists d \forall t [t \in (t_0 - d, t_0 + d) \Rightarrow f_t(\omega) \in M]$;
voor $h \in S^*$ en

$$\mu^*(N) = 0 \quad , \exists \epsilon > 0 \quad [0 < |\delta| < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{\delta} \{ f_{t_0+\delta}(\omega) - f_{t_0}(\omega) \} \right| \leq h(\omega)] ,$$

voor μ -bijna alle ω bestaat $\frac{d}{dt} f_t(\omega)$ in $t=t_0$, en
 $f_{t_0}(\omega) \in S$ (extra eis, staat niet in syllabus!), dan is $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int f_t(\omega) d\mu$ differentieerbaar in $t=t_0$ en $\varphi'(t_0) = \int \left[\frac{d}{dt} f_t(\omega) \right]_{t=t_0} d\mu$.

(St.I 19). Als voor alle n $\Lambda_n \in \mathcal{K}$, $f|_{\Lambda_n} \in S^*$,
 $\int_{\Lambda_n} |f| d\mu \leq C < \infty$, en $\Lambda_n \uparrow \Lambda$ met $\mu(\Lambda)^n = 0$, dan
 $f \in S^*$ en $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_n} f d\mu \leq C$.

2.4. Radon-Nykodim: $(\Omega, \mathcal{K}, \mu)$ is een σ -finiete maatruimte, ν is een σ -finiete σ -additieve verzamelingsfunctie gedefinieerd op $\mathcal{K}$, ν is absoluut continu t.o.v. μ (dus $\mu(\Lambda) = 0 \Rightarrow \nu(\Lambda) = 0$). Dan is er een f met $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f \in I^*(\mu)$, $\forall \Lambda \in \mathcal{G} \quad \nu(\Lambda) = \int_{\Lambda} f d\mu$. f is μ -bijna uniek; is nog gegeven dat $\forall \Lambda \in \mathcal{G} \quad 0 \leq \nu(\Lambda) \leq \mu(\Lambda)$ is, dan kan de keuze van f zo geschieden dat $\forall \omega \quad 0 \leq f(\omega) \leq 1$.

2.5. Overzicht van product-eigenschappen; in de syllabus ook onder 1.2 (pag.6-10), 2.2 (pag. 99-106) en 2.3 (pag.132-138).

Het cartesisch product $\Omega = \prod_{i=1}^k \Omega_i$, $\Omega_i = (\Omega_1, \dots, \Omega_k)$ is associatief (door identificatie). Als $\mathcal{G}_i$ een algebra in Ω_i is ($i=1,2,\dots,k$) vormen we $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}$ de kleinste algebra die alle vzn $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$ met $\Lambda_j \in \mathcal{G}_j$ omvat; deze bestaat uit alle eindige verenigingen van Λ 's.

${}^B(\mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_k) = {}^B({}^B\mathcal{G}_1 \times \dots \times {}^B\mathcal{G}_k)$, in het algemeen niet gelijk aan ${}^B\mathcal{G}_1 \times \dots \times {}^B\mathcal{G}_k$, wat wel een algebra maar geen σ -algebra zal zijn.

Geg. twee σ -finiete maatruimten $(\Omega_i, \mathcal{K}_i, \mu_i)$ ($i=1,2$).

Dan is

$$m\left(\bigcup_{j=1}^n (\Lambda_1^j, \Lambda_2^j)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \mu_1(\Lambda_1^j) \cdot \mu_2(\Lambda_2^j)$$

(voor disjuncte verenigingen) een σ -additieve normale inhoud op $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$. Bij uitbreiding wordt dit de maat $\mu_1 \times \mu_2$ op een klasse die ${}^B(\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2)$ omvat (par.1.4). We hebben nu een product van maatruimten: $(\Omega_1, \mathcal{K}_1, \mu_1) \times (\Omega_2, \mathcal{K}_2, \mu_2) = ((\Omega_1, \Omega_2), \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2, \mu_1 \times \mu_2)$.

De vorming van deze producten is associatief.

Voor $\Lambda \in {}^B(\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2)$ geldt voor de sneden: $\forall \omega_1 \quad \Lambda_{\omega_1} \in \mathcal{K}_2$, $\mu_2(\Lambda_{\omega_1}) \in I^*(\mu_1)$, etc.

Fubini: $f \in S^*(\mu_1 \times \mu_2) \Rightarrow \mu_1$ -b.o. $f \in S^*(\mu_2)$, $\int f d\mu_2 \in S^*(\mu_1)$,
 $\int d\mu_1 \left\{ \int f d\mu_2 \right\} = \int f d(\mu_1 \times \mu_2)$.

We beschouwen nu een indexverzameling T die niet eindig en zelfs niet aftelbaar behoeft te zijn; bij elke $\tau \in T$ is een maatruimte $(\Omega_\tau, \mathcal{K}_\tau, \mu_\tau)$ gegeven met $\mu_\tau(\Omega_\tau) = 1$. Dan is $\Omega = \prod_{\tau \in T} \Omega_\tau$ een ruimte, waarin $\omega = \{\omega_\tau \mid \text{voor elke } \tau \in T \text{ één } \omega_\tau \in \Omega_\tau\}$ een punt is. Kies nu eindig veel indices $\tau_1, \dots, \tau_N$ en bij elke j één $\Lambda_{\tau_j} \in \mathcal{K}_{\tau_j}$. $Z(\Lambda_{\tau_1}, \dots, \Lambda_{\tau_N}) = \{\omega \mid \omega_{\tau_1} \in \Lambda_{\tau_1}, \dots, \omega_{\tau_N} \in \Lambda_{\tau_N}\}$ is een cylindervz. met basis $(\Lambda_{\tau_1}, \dots, \Lambda_{\tau_N})$ en als $\prod_{\substack{\tau \in T \\ \tau \neq \tau_j}} \Omega_\tau$.

$m(Z) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^N \mu_{\tau_j}(\Lambda_{\tau_j})$ geeft een normale inhoud op

$\mathcal{K}_T = \prod_{\tau \in T} \mathcal{K}_\tau$ = de kleinste algebra die alle cylindervzn met eindige basis omvat.

(St.2.5.1). ${}^B\mathcal{K}_T$ bestaat uit alle cylindervzn met aftelbare basis. Wanneer de normale inhoud m σ -additief is, kan hij worden uitgebreid tot een maat op ${}^B\mathcal{K}_T$. We hebben dan een speciaal geval van de volgende stelling:

(St.2.5.3). Kolmogorov. Als voor elke $\tau \in T$ Ω_τ een Euclidische ruimte R^n is met als σ -algebra $\mathcal{K}_\tau$ de Borelvzn, en er is voor elke eindige greep $\tau_1, \dots, \tau_N$ een intervalmaat $\mu_{\tau_1, \dots, \tau_N}$ gegeven met $\mu_{\tau_1, \dots, \tau_N}(\prod_{j=1}^N \Omega_{\tau_j}) = 1$, terwijl deze maten onderling consistent zijn, $j=1$ dan is er één maat μ op ${}^B\mathcal{K}_T$ waarvoor bij elke eindige greep $\tau_1, \dots, \tau_N$ en elk stel $\Lambda_{\tau_j} \in \mathcal{K}_{\tau_j}$ ($j=1, \dots, n$) geldt

$$\mu(Z(\Lambda_{\tau_1}, \dots, \Lambda_{\tau_N})) = \mu_{\tau_1, \dots, \tau_N}(\Lambda_{\tau_1}, \dots, \Lambda_{\tau_N}).$$

(St.2.5.5). Is μ' de volledig gemaakte μ van de vorige stelling, en $\overline{\mathcal{K}}_T$ de σ -algebra der μ' -meetbare vzt, dan is er bij elke $\overline{\mathcal{K}}_T$ - meetbare functie $f(\omega)$ een rij functies $f_n(\omega)$, elk: van slechts eindig veel ω_τ afhangend, met $\lim f_n(\omega) = f(\omega)$ μ' - b.o. Zo is elke oneindig-dimensionale Baire-functie μ' -bijna gelijk aan de limiet van een rij eindig-dimensionale Bairefuncties.